EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

oktober 09

nr 2

jaargang 85

Examens vmbo-BB 2009

Digitale eindexamens

Werken met meervoudige intelligenties

Exittoets vwo A

Notulen en Jaarverslag

Felix Gaillard (1929-2009)





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

oktober
09
nr 2
jaargang 85



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Klaske Blom,
Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 65,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 37,50
- studentleden: € 32,50
- gepensioneerden: € 37,50
- leden van de VVWL of het KWG: € 37,50

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVVW): € 60,00
Instituten en scholen: € 140,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

Kort vooraf

[Klaske Blom]

De kop van dit schooljaar is er weer af en u heeft het tweede nummer van Euclides in handen. In ons vorige nummer stond een kort berichtje van het overlijden van Felix Gaillard. Zijn vriend en medebestuurslid Jan Maassen schetst in een 'In memoriam' een portret van een aimabele man die een buitengewoon gewaardeerd bestuurslid van de NVvW geweest is. Ook al heb ik Felix Gaillard zelf niet gekend, uit de woorden van Maassen begrijp ik dat we een bijzonder iemand verloren hebben.

Examenstaartje

Dit nummer heeft nog een examenstaart: Han Belt schreef het Cito-examenstuk over het examen vmbo-BB. Op de meeste scholen is dit examen digitaal afgenomen en omdat er in de zomer nog digitale varianten in gebruik waren, moest het tot september geheim blijven; we konden er dus niet eerder over publiceren. Belt analyseert wat mee- en tegenviel in dit examen. Aansluitend horen we in een interview met vmbo-BB-docent Jaap van Braak een geluid uit het veld: hij is 'niet onverdeeld gelukkig met het digitale examen'. Over examens valt nog veel meer te zeggen: Kees Alkemade doet dat in een kort stukje over 'breien'. Harm Jan Smid wijdt zijn column deze keer ook aan examens, en wel aan de gestrengheid daarvan. En we krijgen door een bijdrage van Lourens van den Brom meer zicht op de totstandkoming van examens in eerste helft van de vorige eeuw. Ook in andere media wordt veel geschreven over de examens; ik wil u wijzen op een aantal afleveringen van de WiskundE-brief in de maand september, waarin redactionele artikelen verschenen met informatie over de examenstof van de vakken wiskunde A en B op het vwo.

Reacties van lezers

Tijdens redactievergaderingen discussiëren we af en toe over de wenselijkheid om in Euclides een rubriek te maken waarin we reacties van lezers kunnen opnemen. De reden dat we hiertoe nog steeds niet over gegaan zijn, is dat Euclides ongeveer eens in de zeven weken verschijnt en dat het productieproces lang is; áls u al onmiddellijk na verschijnen van het blad zou reageren, is het volgende nummer waarschijnlijk al in productie en verschijnt uw reactie pas in een daaropvolgend nummer; dus meer dan drie maanden na het oorspronkelijke stuk. Is het dan nog zinvol? Met een dergelijke rubriek zouden we een actualiteit suggereren die we niet waar kunnen maken. Toch – dit gezegd hebbend – verheugt het mij dat lezers hun reacties op artikelen insturen, en we willen ze u ook graag voorleggen als er sprake is van nieuwe gezichtspunten en/of aanvullingen die, ook enige tijd na de oorspronkelijke publicatie, nog de moeite van het lezen waard zijn. In dit nummer vindt u diverse dergelijke bijdragen. Het artikel 'De staartdeling is nooit weggeweest' van Lonneke Boels (nummer 84-7) heeft twee lezers, David van Oorschot en Joost Hulshof, tot een reactie geïnspireerd, en Gerard Wiarda stuurde een aanvulling in op het vierhoekenschema van Jan Willem Schutter (nummer 84-6).
U herinnert zich vast de oproep die Hessel Pot deed in nummer 84-8. Hij vroeg naar de betekenis die wij als onderwijsmensen in het Nederlandse taalgebied op het oog hebben wanneer we in mondelinge of schriftelijke communicatie het woord verhouding of breuk gebruiken. Ronald Meester kwam met een verrassende reactie, zij het zonder concreet antwoord te geven op de door Pot gestelde vragen. Een vervolg op de oproep en de reacties daarop, door Pot, vindt u in een volgend nummer. En er kwamen twee reacties binnen op een rubrieksaflevering van Ton Lecluse. Aad Goddijn en Louis Maassen klommen in de pen naar aanleiding van 'Vanuit de oude doos' in nummer 84-8 (houdt u pen en papier bij de hand).

Over toetsen gesproken

Ook op andere momenten dan waarop examens wordt getoetst, en dat het dan anders kan, beschrijft Ingrid Berwald in haar artikel 'anders toetsen'. Zou u het aandurven om uw leerlingen een paraboolbaan te laten filmen en dan niet zomaar omdat het 'leuker' of 'eens wat anders' moet zijn, maar om serieus aan te sluiten bij het idee van meervoudige intelligentie? Leest u hoe motiverend deze aanpak werkte voor de leerlingen van het IJsselcollege. En Peter Kop beschrijft in een helder artikel de exittoets voor wiskunde A vwo, die gemaakt is door de Werkgroep HAVO/VWO van de NVvW.

Tot slot

In dit nummer vindt u enige stukken ter voorbereiding op de jaarvergadering van de NVvW op 7 november; u vindt ze op de Verenigingspagina's, naast een mooie bijdrage van Marian Kollenveld waarin ze vertelt welke activiteiten allemaal door de Vereniging worden ondernomen. Het is een indrukwekkende lijst. Ik wens u weer veel leesgenoegen.

Inhoud

Examen vmbo-BB 2009, 1e tijdvak

[Han Belt]

In het examennummer van Euclides, nummer 85-1, werd u door verschillende Cito-medewerkers al geïnformeerd over de eindexamens wiskunde 2009 in het eerste tijdvak van vmbo-KB tot en met vwo-B12. Op het moment van schrijven van dat artikel waren er nog digitale varianten van het eindexamen vmbo-BB in gebruik, en dus nog geheim. Op 1 september is de geheimhouding gedeeltelijk opgeheven en kunnen we in dit artikel nader ingaan op het examen vmbo-BB. **Voor de tabellen zie pag. 57.**

Aantallen

Het aantal scholen waarvan de leerlingen uit de basisberoepsgerichte leerweg (BB) deelnemen aan de digitale wiskunde-examens, is gelijk gebleven. Net als vorig jaar namen er 450 scholen deel aan het zogeheten CBT-examen (CBT staat voor Computer Based Testing), terwijl de leerlingen van 77 scholen het centraal schriftelijk eindexamen (CSE) maakten. Het percentage leerlingen dat het digitale examen maakte, steeg daardoor nauwelijks; ***zie Tabel 1*** [Leerlingenaantallen vmbo-BB]. De trend van een dalend aantal BB-leerlingen gaat echter gestaag door; ***zie Tabel 2*** [Verdeling van de examen-kandidaten VMBO over de leerwegen].

Varianten

Net als in vorige jaren kregen de scholen de beschikking over zes digitale varianten (en drie herkansingsvarianten) die zodanig op elkaar waren afgestemd dat maximumscore, onderwerpen, vraagvormen en moeilijkheidsgraad zoveel mogelijk overeenkwamen. Natuurlijk bleven er verschillen bestaan, maar deze zijn gecompenseerd door in de uiteindelijke normering een variatie in de N-term toe te passen. Liever zagen we natuurlijk dat de resultaten van de leerlingen per variant gelijk waren, maar dat zal waarschijnlijk een utopie blijven. ***In Tabel 3*** [N-termen 2009 met percentages onvoldoende] *treft u de N-termen aan die bij de verschillende varianten zijn toegepast met daarbij het resulterende percentage onvoldoendes. Er waren ook nog drie varianten h1, h2 en h3, de herkansingen, waaraan door een kleine en anders samengestelde populatie werd deelgenomen. De scores hiervan wijken behoorlijk af en zouden met het tweede tijdvak CSE vergeleken moeten worden.*

Voor het invoeren van verschillende tekens, waaronder bijvoorbeeld het euro-teken, hadden de leerlingen dit jaar een 'gereedschapskist' tot hun beschikking (***zie figuur 1***). Door vanuit een venster het gewenste teken naar het invoerveld te slepen kon dat symbool worden ingevoegd zonder gebruik te hoeven maken van toetscombinaties met de ALT-toets.

In dit artikel worden verder alleen de digitale variant 1a en het vrijwel overeenkomstige schriftelijke examen besproken, omdat de overige varianten *niet* openbaar gemaakt worden.
In Tabel 4 [VMBO-BB 2009 / variant 1a] staan de kerngegevens van variant 1a, waarbij de p'-waarde (percentage gescoorde punten) is gebaseerd op een representatieve steekproef van 3146 leerlingen.

Kopieermachine

De vragen bij deze opgave leverden de meeste leerlingen geen problemen op. Het aantal kopieën dat met een kaart kon worden gemaakt, de kosten voor de school, het kiezen van de goede grafiek en de opbrengst voor de school werden door het grootste deel van de leerlingen goed beantwoord. Het terugrekenen met de woordformule:
opbrengst = 0,02 × *aantal kopieën* – 1800
zorgde voor meer problemen, maar met een p'-waarde van 53 ging ook dit lang niet slecht.

Schuur

In de volgende context kwam het domein Meetkunde aan bod. In de eerste opgave moest in het CBT-examen door het verslepen van twee ramen (***zie figuur 2***) een tekening lijnsymmetrisch worden gemaakt. De p'-waarde van deze vraag was 94. Bij het papieren examen was er in de schuur aan één zijde een raam getekend waardoor de figuur niet lijnsymmetrisch was. Leerlingen werd alleen gevraagd om uit te leggen of het vooraanzicht lijnsymmetrisch was, en dat leverde een onverwacht lage score van 30 op. Blijkbaar keken de leerlingen daarbij alleen naar de contouren van de schuur en werd het ene raam over het hoofd gezien. Daarna moest een hellingshoek worden berekend en het aantal voor het dak benodigde dakpannen worden bepaald; hierbij verschilden de p'-waarden van papier en digitaal nauwelijks. In de laatste vraag van deze context mochten de leerlingen met een gegeven formule de oppervlakte van een raam uitrekenen, en dat lukte de leerlingen met de papieren versie en de digitale versie redelijk.

Zomaar weggegooid

Waar het in de meeste gevallen lukte om de eerste vraag van de contexten leerling-vriendelijk te maken door met een instap-vraag te starten, ging dat bij de eerste vraag van *Zomaar weggegooid* niet op, zo bleek na de afname. Doordat er drie gegevens waren waarvan de leerlingen er maar twee hoefden te gebruiken, ging het in iets minder dan de helft van de gevallen mis.
Deze context handelde over de hoeveelheid voedsel die bij restaurants wordt weggegooid, de hoeveelheid geld die daarmee gemoeid is, en hoeveel medicijnen daar in Afrika voor gekocht zouden kunnen worden. De scores bij de eerste drie vragen ontliepen elkaar bij papier en digitaal niet wezenlijk; de vragen werden gemaakt zoals verwacht. Bij de laatste vraag was de p'-waarde van het CBT-examen beduidend hoger dan van het papieren examen, 57 tegenover 46. Een verklaring hiervoor zou kunnen zijn dat de tekst in het CBT-examen vergezeld ging van een toelichtend plaatje, terwijl dat bij de papieren versie niet het geval was. Omdat de gehele context moet passen op twee naast elkaar liggende pagina's, is er voor elke vraag een beperkte ruimte beschikbaar. Bij het CBT-examen staat elke vraag op een ander scherm en was die ruimte in dit geval wel beschikbaar.

Preview Toets
bb-wi-09 Vraag 12 van 25

Zomaar weggegooid

medicijnen voor 1 ziek kind = per dag

In hetzelfde krantenbericht meldt een arts:
"Ieder jaar lijden er in Afrika veel kinderen aan een ernstige ziekte.
Met de juiste medicijnen kan een ziek kind genezen worden.
Voor één kind zijn de kosten van deze medicijnen € 0,15 per dag."

Laat hieronder met een berekening zien dat voor één ziek kind de kosten van de medicijnen afgerond € 55,- per jaar zijn.

365 * €0,15 =

Speciale tekens

figuur 1: Gereedschapskist uit VMBO BB 2009 digitaal

Preview Toets
bb-wi-09 Vraag 6 van 25

Schuur

Hieronder is het vooraanzicht van een schuur getekend.
In het vooraanzicht ontbreken nog 2 ramen.

Plaats de twee ontbrekende ramen in het vooraanzicht, zodat het vooraanzicht lijnsymmetrisch wordt.

figuur 2 Uit: VMBO BB 2009 digitaal

Preview Toets
bb-wi-09 Vraag 16 van 25

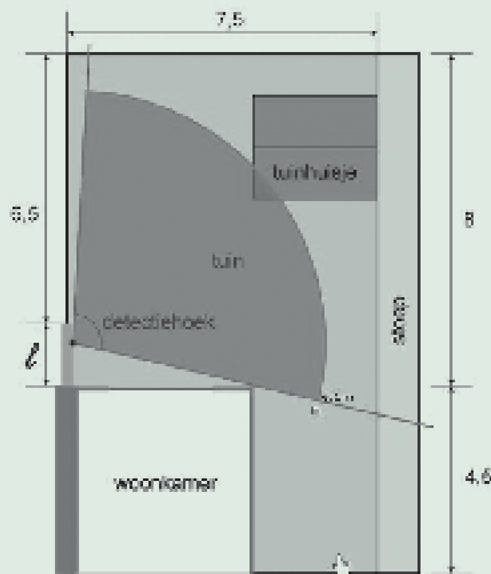
Tuinverlichting

7,5
6,5
8
4,5
tuinhuisje
tuin
detectiehoek
woonkamer

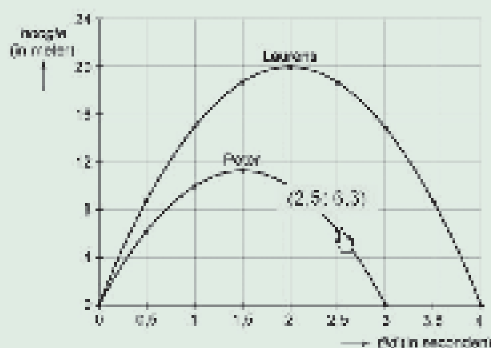
Hoeveel graden is de detectiehoek van de sensor?

graden

figuur 3 'Digitale geodriehoek'



figuur 4 Uit: VMBO BB 2009 digitaal



figuur 5 Uit: VMBO BB 2009 digitaal

Tuinverlichting
Hier ging het om meten aan een tuin en bepalen van de detectiehoek van een bewegingsmelder. In vraag 14 werd de lengte van een muur gevraagd. De leerlingen moesten die uitrekenen door het combineren van twee gegeven waarden in de tekening. In opgave 15 werd gevraagd om te laten zien dat de schaal van de tekening 1 : 150 was. Het rekenen met een schaalverdeling blijft lastig voor de leerlingen en het was misschien daardoor wel de slechtst gescoorde vraag van dit examen.
Bij vraag 16 maakten de leerlingen bij het digitale examen gebruik van de *digitale geodriehoek* (***zie figuur 3***) die ook bij het digitale examen 2008 werd ingezet. Uit de p'-waarden valt, vergelijkend met de resultaten van het papieren examen, de conclusie te trekken dat het voor leerlingen niet of nauwelijks uitmaakt of er een digitale dan wel een *echte* geodriehoek gebruikt moet worden.
Opgave 17 gaf weer een groot verschil te zien in p'-waarden tussen CBT en CSE. In de digitale versie mochten de leerlingen het detectiegebied van de sensor aangeven door een cirkelsegment te vergroten met behulp van slepen, en daarna het goede gebied aan te geven (***zie figuur 4***). In het CSE moest dit daadwerkelijk met een passer worden getekend. Het verschil in p'-waarde was daarbij enorm: 71 om 40. Het tekenen vraagt natuurlijk ook veel meer handelingen en handigheid dan het slepen en klikken met een computermuis.

Raket
Deze algebracontext werd bij beide versies van het examen vrijwel hetzelfde gemaakt. Het aflezen uit een grafiek (opgave 18) gaf weinig problemen. De vraag: 'Gedurende hoeveel seconden is de hoogte meer dan 15 meter?' was complexer en scoorde dus veel slechter. Dit was ook het geval bij vraag 20 waar werd gevraagd om uit te leggen waarom de woordformule:
hoogte = 20 × *tijd*
niet bij de gegeven kromme hoort.
In het papieren examen werd in vraag 21 gevraagd een grafiek te tekenen, in de digitale variant was de opdracht om van drie beweringen aan te geven of ze waar dan wel niet waar zijn (***zie figuur 5***). Ondanks de totaal verschillende vraag waren de p'-waarden nagenoeg gelijk.

Tabel 1 – Leerlingenaantallen VMBO-BB

	2005	2006	2007	2008	2009
schriftelijk	24229	23794	12948	2986	2471
digitaal		5517 19%	9671 43%	18938 86%	18554 88%
totaal	24229	29311	22619	21924	21025

Tabel 2 - Verdeling van de examenkandidaten VMBO over de leerwegen

	2005	2006	2007	2008	2009
BB	25%	32%	26%	25%	24%
KB	25%	24%	27%	23%	27%
GL/TL	46%	44%	47%	48%	49%

Tabel 3 N-termen 2009 met percentages onvoldoende

Variant	1a	1b	2a	2b	3a	3b
N-term	1,2	1,4	0,9	1,3	1,4	1,5
% onvoldoende	25	22	21	22	28	22

Tabel 4 - VMBO-BB 2009 / variant 1a

opgave	domein	item	maximum score	gemiddelde score	p' waarde papier	p' waarde digitaal
Kopieermachine	Algebra & rekenen		1	0,92	52	89
		2	2	1,38	69	63
		3	2	1,38	69	67
		4	2	1,77	89	83
		5	3	1,59	56	53
Schuur	Meetkunde	6	2	0,61	30	54
		7	2	0,84	42	43
		8	3	1,81	60	57
		9	2	0,90	45	42
Zomaar weggegooid	Algebra & rekenen	10	2	1,03	52	51
		11	2	0,99	49	47
		12	2	1,53	81	78
		13	2	0,92	46	57
Tuinverlichting	Meetkunde	14	1	0,73	75	75
		15	3	0,66	22	23
		16	2	1,41	70	72
		17	3	1,19	40	[illegible]
Raket	Algebra & rekenen	18	1	0,95	95	90
		19	2	0,71	35	34
		20	2	0,62	31	34
		21	2	1,68	84	83
Geld lenen	Algebra & rekenen	22	1	0,95	95	87
		23	2	1,68	84	80
		24	3	1,09	36	32
		25	3	2,09	70	62

Geld lenen

In de laatste context was sprake van een motor die gekocht ging worden en waarvoor geld geleend moest worden. De opdrachten waren in beide examens gelijk, toch scoorden de leerlingen bij het papieren examen bij elk van deze vragen wat hoger. Een mogelijke verklaring zou kunnen zijn dat leerlingen toch met andere ogen naar een computerscherm kijken dan naar papier, en daardoor ook een andere oplossingsstrategie kiezen. Evenals vorig jaar bleek ook nu weer dat het controleren van een percentage (vraag 24) bij een groot deel van de leerlingen op problemen stuit, als er wat meer getallen in de opgave staan. De keuze van de relevante gegevens en het op juiste wijze combineren daarvan is voor veel leerlingen toch erg lastig.

Tot slot

De gemiddelde p'-waarde van het CSE kwam uit op 57 waarmee dit papieren examen vrijwel gelijk scoorde met het gemiddelde van alle digitale varianten. Deze waarde is iets hoger dan de p'-waarde van het papieren examen uit 2008. Of dit examen dus ook als makkelijker werd ervaren door leerlingen en docenten, kunnen we niet aangeven omdat er op het examenforum of anderszins geen reacties op dit examen zijn vernomen. Misschien draagt dit artikel ertoe bij om hierin verandering te brengen.

Over de auteur
Han Belt is wiskundemedewerker en toetsdeskundige van Cito te Arnhem (website: *www.cito.nl*).
E-mailadres: *han.belt@cito.nl*

Digitale eindexamens wiskunde: een uitkomst of een ramp?

INTERVIEW MET JAAP VAN BRAAK, WISKUNDEDOCENT VMBO-BB

[Joke Verbeek]

Sinds 2006 kunnen de leerlingen van de basisberoepsgerichte leerweg hun centraal schriftelijk examen voor wiskunde op de computer maken. Op een vooraf afgesproken tijdstip krijgt de school toegang tot de site van Cito en krijgen de leerlingen de vraagstukken op het scherm in plaats van op papier. De antwoorden moeten worden ingetoetst (open vragen) of aangeklikt (meerkeuzevragen). Het nakijkwerk – met uitzondering van de meerkeuzevragen – blijft voor de docent. Cito heeft inmiddels voldoende ervaring met de digitale examens, vinden Cito-medewerkers zelf, en maakt zich op om ook de examens van de kaderberoepsgerichte leerweg op deze manier aan te bieden. Er zijn al pilots geweest. En het zal niet zo lang meer duren of ook voor de andere leerwegen van het vmbo zullen de wiskunde-examens gedigitaliseerd worden. Een goede ontwikkeling? In dit artikel een geluid uit het veld.

Kennismaken

Jaap van Braak (39) geeft wiskundelessen aan de leerlingen van de basisberoepsgerichte leerweg van de Jacobus Fruytier Scholengemeenschap in Apeldoorn. Zijn school doet al vanaf het begin mee met de pilot van de digitale examens. De negen leerlingen van Jaap zijn allemaal geslaagd. Het gemiddelde cijfer voor het examen wiskunde was een 5,8 (bij een N-term van 1,3). Het gemiddelde van het schoolexamen was een 6,7. ‘Ik ben blij dat ze dat beter maken’, zegt Jaap, ‘De leerlingen scoren op zo’n digitaal examen toch wel slechter, dus daar moeten we eigenlijk wel rekening mee houden bij de schoolexamens.’
Jaap is niet onverdeeld gelukkig met het digitale examen: ‘De stappen in het examen zijn soms groter, het boek bouwt de opgaven meer op. Dat hoort ook bij deze leerlingen. Zij overzien complexe opgaven niet en dat hoeven ze ook niet. Dat is eigen aan hun niveau. Mijns inziens houden de examenmakers daar te weinig rekening mee. Naar mijn gevoel zitten er ook meer opgaven met grote stappen in het digitale examen dan voorheen in het papieren examen. Er is beduidend meer leeswerk, vooral omdat dezelfde tekst meerdere keren herhaald word. Leerlingen gaan die tekst dan toch weer helemaal lezen. Hetzelfde verhaal geldt voor een tabel die herhaald wordt: ook die wordt opnieuw bekeken.’
Ook technisch is een digitaal examen naar zijn mening moeilijker dan een papieren examen: ‘Bijvoorbeeld als ze kubieke meter moeten intikken. Dat is lastig. Er staan dan wel aanwijzingen op het scherm, en de laatste keer was er zelfs een tool voor gemaakt, maar het leidt af. De leerlingen zijn, hup, uit de vraag en uit hun concentratie.’

Digitaal of papieren examen?

Op de vraag – als hij mocht kiezen: een digitaal examen of een papieren – wat zijn keus dan zou zijn – komt het antwoord snel en duidelijk: ‘Op papier, absoluut!’ Hij heeft daar ook redenen voor: ‘In de eerste plaats zijn er op een papieren examen geen meerkeuzevragen. Dat betekent dat je ook een deel van de punten kunt toekennen. Bij meerkeuzevragen kan dat niet. Dan is het alles of niets. Dat is een nadeel voor de leerling. In de tweede plaats zeggen leerlingen dat ze een papieren examen officiëler vinden dan een examen achter de computer. Achter de computer zitten ze regelmatig, denk aan VU-grafiek, ze mogen praten, overleggen etc. Een computer past in hun beleving niet bij een examen. In de derde plaats gebruiken ze achter de computer geen kladpapier. Al het papier lag er na het examen nog maagdelijk. Ze hebben het idee dat alles met de computer moet gebeuren. Dat geeft kwaliteitsverlies. In de vierde plaats kunnen leerlingen slechter inschatten hoe het examen eruitziet. Een papieren examen geeft overzicht, je ziet het geheel. Maar zo’n digitaal examen komt vraag voor vraag, ze hebben geen idee van wat er allemaal nog komt. En dan nog de technische problemen, zoals het opnieuw moeten inloggen als de computer vastloopt. Allemaal onnodige zaken die stress opleveren bij de leerlingen. Als laatste wil ik noemen een nadeel voor mezelf: het nakijken. Dat kan alleen maar op school, waar het altijd onrustig is. Liever doe ik dat in alle rust thuis. Nu moet het gebeuren in een tussenuur of na schooltijd.’
Duidelijk dus, Van Braak is tegen.

De ervaringen dit jaar

Hebben jullie nog iets gedaan om de leerlingen voor te bereiden op dit examen?
‘Ja, met deel twee van onze wiskundemethode flink oefenen… O, je bedoelt iets speciaals voor de digitale examens. In februari en maart zet het Cito de module een tijdje open met oefenexamens. Dat zijn examens uit de voorgaande jaren. Op onze school hadden we drie weken de tijd om te oefenen. Ik vind dat te weinig. Je kunt eigenlijk maar één of twee keer in die



foto 1 Jaap van Braak legt uit

periode naar het computerlokaal met de leerlingen. Dat zou voor mij wel een langere periode mogen zijn.'

Heeft u er een idee van hoe de leerlingen over het digitale examen denken?
'Dat is heel wisselend. De meeste leerlingen geven aan liever te werken met een papieren versie. Anderen vinden het wel best.
Het lijkt voor hen makkelijker, zeker die meerkeuzevragen, want dan kunnen ze iets kiezen. De praktijk laat zien dat ze dan niet gaan rekenen maar raden.'

Heeft u iets van de examens kunnen zien? Kunt u er inhoudelijk iets over zeggen?
'Ik heb tijdens het examen de opgaven kunnen zien en ik heb ze natuurlijk nagekeken. Er waren twee versies: de *gewone* versie en de versie voor de dyslectici. Die laatste versie vond ik beduidend moeilijker. In beide versies zat redelijk wat meetkunde, wat altijd al moeilijker is. In één van beide versies zaten ook vragen over doorsnede-tekeningen. Dat hebben we nooit geoefend, want het staat niet in de boeken. Tevens heb ik de eindtermen bekeken en ook daar kan ik het niet terugvinden. Waarschijnlijk zijn deze opgaven landelijk toch best goed gescoord, gezien de N-term van 1,3. Voor het eerst was er een tweedegraads verband, een parabool. Ze moesten waarden aflezen en conclusies trekken. Verrassend voor dit niveau, zeker wanneer het twee parabolen in één assenstelsel betreft. Aflezen en conclusies trekken is een vaardigheid die deze leerlingen moeten beheersen. Anderzijds zijn er nooit tweedegraads verbanden behandeld. En dan was er nog de vraag: Leg uit waarom de formule *hoogte* = 20 × *tijd* niet bij dit verband hoort. Die vraag is echt te hoog gegrepen! Het woord "verband" kennen de leerlingen alleen in een andere context en tevens raakt dit de theorie van de tweedegraads vergelijkingen (ze moeten vergelijken) en dat gaat te ver. Bij mij had elke leerling bij die vraag een score van nul.
Maar leerlingen vinden andere dingen moeilijk dan ik. Zij klaagden over de opgave waarbij ze tonnen moesten omrekenen naar kilogrammen. Terwijl erbij stond 1 *ton* = 1000 *kg*, vonden ze het toch moeilijk.'

Zijn er ook nog positieve kanten aan een digitaal examen?
Ook op deze vraag heeft Jaap vlot een antwoord: 'O, jawel hoor. Er was een vraag over symmetrie, een hele leuke vraag. Dat had niet gekund op papier. De leerlingen hebben die vraag ook goed gemaakt. En dat slepen is dan wel een voordeel.'

Conclusie

Resumerend kunnen we, zonder overdrijven, stellen dat de mening van Van Braak over de digitalisering van de wiskunde-eindexamens niet positief is. Misschien heeft u ervaring met digitale eindexamens en deelt u Van Braaks mening of juist niet, of ziet u met angst en beven dan wel met verlangen uit naar de digitalisering van de wiskunde-examens op andere niveaus. Laat het ons dan weten! Het is goed met elkaar in gesprek te blijven over ontwikkelingen in het onderwijs, ook – of misschien juist – op de lagere niveaus.

Over de auteur
Joke Verbeek is redacteur van *Euclides* en docent wiskunde op het Arentheem College in Arnhem
E-mailadres: *jokeverbeek@chello.nl*

Verschenen / Logicomix



Ondertitel: Een epische zoektocht naar de waarheid
Auteurs: Apostolos Doxiadis, Christos Papadimitriou
Vertaling: Mat Schifferstein
Uitgever: De Vliegende Hollander, Amsterdam (2009)
ISBN: 9789049500405
Prijs: € 19,95 (346 pagina's, paperback)

In Logicomix vertelt Bertrand Russell, de grote filosoof en wiskundige, over de queeste naar de grondslagen van de wiskunde. Hij beschrijft het grote zoeken naar complete en consequente mathematische waarheden. Een zoektocht die velen tot waanzin dreef. Russell stelt ons voor aan grote namen binnen de logica en wiskunde, onder wie Georg Cantor, de grondlegger van de verzamelingenleer, David Hilbert en Henri Poincaré, briljante wiskundigen en levenslange antagonisten, Ludwig Wittgenstein, de grote filosoof, en de twee vaders van de computer, Alan Turing en John von Neumann. Logicomix is een levendig (beeld)verhaal over de complex verweven levens van deze intellectuele reuzen, hun gezinnen en vrienden, en de wapenfeiten, tragedies en ontgoochelingen die hun generatie tekenden. Maar het is ook het verhaal van onverwachte triomfen, waaronder de geboorte van de moderne computer.

Normen en waarden

[Kees Alkemade]

Een en een is twee en twee is vier
Kleine kleutertjes die zaten op een dak
Boven je hoofd



Oma spreekt: ‘Breien, wie breit er tegenwoordig nog? Ik heb aan dat breien altijd plezier beleefd. Als je de bladen mag geloven dan zit iedereen te breien; het zou al een hele tijd weer in zijn. Maar als je met jonge mensen praat dan blijkt er niet één te kunnen breien. Ze kijken je aan alsof je een vies woord zegt. En toch wordt het breien gepromoot.’

Breien, daar gaat dit stukje over:
1 + 1 = 2 + 2 = 4

Als tweede corrector kwam ik dit verschijnsel bij een aantal leerlingen tegen. De desbetreffende docent zei dat hij van zijn sectie had geleerd om breien niet fout te rekenen. We hebben het hier over wiskunde A en wiskunde B op de havo. Mijn eigen tweede corrector wiskunde B12 op het vwo zei ook dat hij breien niet meer fout rekent: ‘Op mijn school rekenen de docenten mavo het wel fout bij proefwerken en SE’s , maar niet bij het CSE. Volgens hen is dit laatste de gewoonte in examenland mavo wiskunde.’
Bij ons op school is breien verder gewoon fout. Als je dit vanaf klas 1 afstraft, is het snel als massale fout verdwenen.
Aan de CEVO zou ik willen vragen om duidelijke richtlijnen hierover te geven. Zelf pleit ik voor: ‘... voor iedere fout, verschrijving, breisteek... één punt aftrekken...’

Verder ben ik blij met de nieuwe afspraken rond de eerste en tweede correctie. Van het beruchte middelen zijn we af. Je kunt in de huidige situatie bijvoorbeeld het overleg stilleggen en aankondigen dat je via je schoolleider om een derde en bindende mening gaat vragen. Dit vergemakkelijkt het bespreken van het werk, zeker bij meningsverschillen als over het breien.
Als tweede corrector heb ik zo menige breisteek uitgehaald. De positie van de tweede corrector is duidelijk verbeterd.

Nu nog het breien de wereld uit
de pen van
Kees Alkemade

Over de auteur
Kees Alkemade is wiskundedocent aan het Meridiaan College, vestiging het Nieuwe Eemland in Amersfoort.
E-mailadres: *alkemade-steekelenburg@planet.nl*

Felix Gaillard, 16 augustus 1929–20 augustus 2009

IN MEMORIAM

[Jan Maassen]



Donderdag 20 augustus vernam ik dat Felix Gaillard 's morgens was overleden. Als je dit hoort, besef je dat je iemand met wie je zo bevriend was en met wie je jarenlang in het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren samengewerkt hebt, voortaan moet missen.
Felix leerde de Vereniging kennen door de a-, b- en c-cursussen van de didactiek-commissie van de Vereniging. Door het enthousiasme dat hij hierbij toonde, was het vanzelfsprekend dat, toen de Vereniging haar werkterrein in 1976 ging uitbreiden naar het beroepsonderwijs, hij in het bestuur van de vereniging werd gekozen. In het bestuur dachten we hierdoor een goede ingang naar het beroepsonderwijs te krijgen, maar we kregen veel meer. Felix bleek namelijk een zeer goed organisator en de Vereniging heeft hiervan veel gebruik gemaakt.
Het begon klein: aan het einde van een bestuursvergadering werd altijd lang gezocht naar een nieuwe vergaderdatum waarop iedereen kon komen. Volgens Felix moest dit toch veel efficiënter kunnen, en hij stuurde ons aan het einde van het schooljaar een lijst met vergaderdata voor het gehele jaar, met het verzoek deze data vrij te houden.

In 1981 nam hij het penningmeesterschap over van Joop van Dormolen en begon hij de computer in te schakelen voor de ledenadministratie en de boekhouding. De meeste wiskundeleraren die reeds lang lid zijn, zullen Felix vooral kennen door de organisatie van de jaarvergaderingen en de examenbesprekingen. Alles werd terdege voorbereid en niets ontging hem. Op de jaarvergaderingen was hij al heel vroeg op de school aanwezig en controleerde of alles goed ging. Alle deelnemers werden daarna door hem en zijn vrouw Joke ontvangen. Zelfs mijn computer was onder de indruk van zijn organisatie. Als ik de spelling-controle in Word Perfect gebruikte, werd mij steeds als 'Felix' in de tekst voorkwam, gevraagd of ik dit niet door 'feilloos' wilde vervangen.

Voor Felix waren de leden geen namen in een kaartsysteem of database maar echte mensen. Hij kende velen persoonlijk. Wanneer hij bijvoorbeeld bericht van overlijden van een van de leden kreeg, stuurde hij een condoleancebrief.
Ook binnen het bestuur was hij een zeer aimabel mens, altijd bang om iemand pijn te doen. Het kon voorkomen dat je daags na een bestuursvergadering gebeld werd met de vraag of een opmerking van hem wel goed overgekomen was en of je je er niet door gekwetst voelde.

In het boek *Honderd jaar wiskundeonderwijs* staat bij de activiteiten van *Vrouwen en Wiskunde*: '1981, Vrouwen en Wiskunde opgericht binnen de NVvW met vanaf het begin veel ondersteuning van de penning-meester, Felix Gaillard'. Wij zeiden dan ook altijd tegen Felix als we het over Vrouwen en Wiskunde hadden: 'Jouw vrouwen'.

In 1991 beëindigde Felix zijn bestuurlid-maatschap, maar hij bleef zich volledig voor de Vereniging inzetten. Hij bleef de ledenadministratie verzorgen en stond de nieuwe penningmeester bij als boekhouder. Ik vroeg wel eens of zijn huis nog een woonhuis was of meer een verenigings-kantoor. Toen in 1993 een nieuw *Vademecum voor de Wiskundeleraar* verscheen, werden er zo'n 4000 exemplaren bij hem thuis afgeleverd. Hij zorgde voor de enveloppen, de adresstickers en de verzending. Dit alles bijgestaan door zijn vrouw.
Dat de vereniging Felix erg waardeerde bleek wel uit het feit dat hij tijdens de jaarvergadering van 11 november 1995 tot erelid werd benoemd. Ook de Koningin kende hem vanwege al zijn wiskundige activiteiten de onderscheiding *Ridder in de Orde van Oranje-Nassau* toe.

Toen de bestuursleden uit de tijd van Felix vonden dat ze elkaar te weinig zagen en wat vaker bij elkaar moesten komen, begon Felix een jaarlijkse bestuursreünie met een diner te organiseren. Vanwege de afnemende gezondheid van Felix kwamen we de laatste jaren in Breda bij elkaar, maar dit jaar konden we gelukkig samen met Felix bijeen komen in Utrecht, in het restaurant Chez Jacqueline waar we zo vaak na de bestuursvergaderingen hadden gegeten. Het enthousiasme dat Felix ten toon spreidde toen hij weer met zijn oude vrienden was, maakt het moeilijk te begrijpen dat dit ons laatste samenzijn was. Natuurlijk zullen we Felix heel erg missen, maar vooral voor zijn vrouw, kinderen en kleinkinderen laat hij een lege plaats achter.

Werken met meer-voudige intelligenties

[Ingrid Berwald]

In het artikel 'Prikkels in de klas' deed Ingrid Berwald in Euclides (84)4 een boekje open over het wiskundedossier waarmee het IJsselcollege de Wiskunde Scholenprijs 2008 gewonnen heeft. Dit wiskundedossier bevat meer dan honderd opdrachten die aansluiten bij verschillende intelligenties die mensen kunnen hebben. Na ervaring opgedaan te hebben met dergelijke opdrachten werd het tijd om ook toetsen in de wiskundeles aan te laten sluiten bij het idee van het werken vanuit meervoudige intelligentie. Over de zoektocht en de eerste positieve ervaringen met dit 'anders toetsen' gaat onderstaand artikel.

VWO-anders

Het IJsselcollege in Capelle aan den IJssel is een brede scholengemeenschap met drie locaties. De locatie PRO (praktijk-onderwijs) is de kleinste, daarnaast is er een locatie vmbo waar lwoo- tot en met kaderleerlingen terecht kunnen. Er is ook een kaderplus klas voor mavo-leerlingen die liever een vak leren en voor de goede kaderleerling die eventueel toch naar de mavo over willen stappen. De derde locatie is mavo, havo en vwo. Leerlingen die in groep 8 een Cito-score van 545 of hoger hebben gehaald, kunnen kiezen uit twee soorten vwo-opleidingen, de gebruikelijke brugklas havo/vwo, of het vwo-anders. Leerlingen die kiezen voor vwo-anders, moeten leren leuk vinden en houden van samen werken. 'Anders' wil zeggen dat er gewerkt wordt vanuit het principe van de meervoudige intelligentie.
Het begrip intelligentie kennen we allemaal uit het dagelijks spraakgebruik. Daarnaast kun je intelligentie meten via gestan-daardiseerde tests. De resultaten worden uitgedrukt in een quotiënt. Een IQ van 100 is normaal. Een eind daaronder ben je zwakbegaafd en ver daarboven hoogbegaafd. Geleerden vragen zich af of intelligentie erfelijk is en daarmee een soort noodlot of een lot uit de loterij, dan wel ontwikkelbaar vanuit een stimulerende sociale omgeving. Uitslag onbeslist.

Meervoudige intelligentie

Begin jaren tachtig ontwikkelde de Amerikaanse hoogleraar Howard Gardner zijn theorie van de meervoudige intel-ligentie. Intelligentie is voor hem de bekwaamheid om problemen op te lossen of om iets bestaands aan te passen aan veranderende omstandigheden. Mensen blijken dat op verschillende manieren te doen. Dat komt door de wijze waarop iedereen gebruik maakt van een reeks verschillende intelligenties. Deze intelligenties zijn voor iedere persoon even uniek als een vingerafdruk. De mate waarin ze onderling in sterkte, mogelijkheden en samenwerking variëren, verschilt van mens tot mens. Anders gezegd, ieder mens heeft zijn eigen profiel van onderling op elkaar inwerkende intelligenties. Elke intelligentie kan aan sterkte winnen, zij het niet ongelimiteerd. Intelligenties zijn dus tot op zekere hoogte ontwikkelbaar. Neurologisch onderzoek bij o.a. oorlogsveteranen met een hersen-beschadiging bood steeds sterkere aanwijzingen voor het bestaan van deze vermogens of intelligenties.

Acht intelligenties

Momenteel heeft Gardner acht verschillende intelligenties benoemd. Het gaat om:
- verbaal/linguistische (taalkundige);
- logisch/mathematische (logisch/ wiskundige);
- visueel/ruimtelijke;
- muzisch/ritmische;
- lichamelijk/kinesthetische (lichamelijk/ motorische);
- intra personale;
- interpersoonlijke;
- natuurgerichte.

Meervoudige intelligentie en het onderwijs

Wat moeten we met die meervoudige intelligentie? Het eerste motief om dit concept in het onderwijs toe te passen, is de groeiende behoefte om meer rekening te houden met verschillen tussen leerlingen. Die hebben niet alleen te maken met komaf en cultuur, maar ook met vermogens van kinderen en jeugdigen. In vrijwel elke groep leerlingen komt vermoedelijk een brede spreiding aan sterke intelligenties voor. Wie een leerling aanspreekt op diens sterke profiel van intelligenties, mag verwachten dat de leereffecten aanzienlijk toenemen. Dat betekent bijvoorbeeld dat we niet alleen verbaal uitleg geven, maar ook via beelden, ritmes, schema's en modellen, doe-activiteiten met een hoog motorisch gehalte, samenwerkingsvormen, individuele reflecties en veldonderzoek. Hetzelfde geldt voor onze leermiddelen. Vanuit de theorie van de meervoudige intelligentie zullen we andere verwerkingsmiddelen van leerstof gaan toevoegen aan ons klassieke repertoire van schriftelijke oefeningen. Dat vraagt ook om een andere inrichting van lokalen en gebouwen.
Een tweede motief om met deze theorie in zee te gaan is de groeiende behoefte van velen een beter evenwicht te vinden tussen het aanbod van leerinhouden en de juiste impulsen voor de persoonlijke ontwikkeling van leerlingen, cursisten en studenten. De theorie van de meervoudige intelligentie maakt ons bewuster van de uniciteit van elke leerling en diens leerproces. De vele werkvormen en middelen die op grond van deze theorie beschikbaar komen, bieden ons de kans om aan die ontwikkeling nu ook concreet te werken. Die ontwikkeling is dan geen vaag pedagogisch ideaal meer, maar een tastbare realiteit.
Het derde motief ligt in de weliswaar beperkte, maar toch aanwezige mogelijkheid om bij leerlingen zwakke intelligenties te versterken. Wanneer ons leerlandschap de geschetste variëteit aan middelen en

werkwijzen krijgt, zal het terloopse leren veel bredere impulsen krijgen dan nu vaak het geval is in onze eenzijdig verbale leeromgevingen.

Meervoudige intelligentie op het IJsselcollege

Ondanks dat er alleen op het vwo gewerkt wordt vanuit de meervoudige intelligentie, is het hele team hier een jaar lang in geschoold. In dat jaar werden de eerste 'andere' lesideeën uitgewerkt en uitgetest, maar ook werd er binnen vakken gekeken welke lesstof er gebundeld kon worden. Rekenen op schaal (ak), verhoudingstabellen (wi) en het kompas (wi, ak, na) is daar een voorbeeld van. Deze lesstof werd uit het eersteklasboek geschrapt en in de vorm van het projectblok 'wie weet de weg' aangeboden. In een projectblok worden steeds andere vakken gecombineerd en het wordt altijd afgesloten met een grote opdracht. Zo is er in klas 2 een combinatie wiskunde met beeldende vorming over de gulden snede. Een andere gevolg van het invoeren van het vwo-anders op school is dat we zijn gaan werken met lesuren van 100 minuten. Ook dit is schoolbreed ingevoerd, waardoor er ook in de mavo- en havo-klassen op andere manieren lesgegeven kon worden.

Meervoudige intelligentie, hoe herken je die?

Een vwo-anders-leerling maakt aan het begin van een schooljaar enkele eenvoudige testjes waaruit de meest gebruikte intelligentie rolt. Tijdens het samenstellen van groepjes wordt hiervan gebruik gemaakt. Tijdens het projectblok samenwerken (mentorles/gym) worden de leerlingen met dezelfde intelligentie bij elkaar gezet. Bij veel lessen worden echter juist de verschillende intelligenties bij elkaar gezet, om zo van elkaar te leren.
De kenmerken die bij de intelligenties horen:
Logisch wiskundig – Ordent graag informatie, denkt logisch, is kritisch, werkt graag met cijfers. Voor deze leerling is het wiskundeboek eigenlijk voldoende . Deze leerling is meestal goed in wiskunde.
Interpersoonlijk – Leerlingen met deze intelligentie werken graag samen en leren van elkaar. Bijvoorbeeld bij het hoofdstuk 'Vergroten' in klas 2: elke leerling krijgt een kaartje met een driehoek (alle driehoeken zien er op het oog hetzelfde uit). In de driehoek staan enkele hoeken en zijdes gegeven. Er zijn steeds drie driehoeken die bij elkaar horen omdat ze gelijkvormig zijn. De leerlingen vormen op deze manier groepjes van drie. Met het groepje berekenen ze vervolgens alle ontbrekende gegevens.
Visueel ruimtelijk – Deze leerlingen nemen de werkelijkheid waar via ruimte en kleuren. Ze zijn vaak creatief. Na het interpersoonlijke begin krijgt de les 'Vergroten' het volgende vervolg: een groepje dat alle ontbrekende gegevens heeft gevonden, krijgt drie sets van drie vellen gekleurd papier, A7, A5 en A3. Elke leerling uit een groepje tekent op het A5-papier een willekeurig zeshoek. Daarna schuiven ze de tekeningen onderling door en wordt het twee keer verkleind nagetekend op het A7-papier. Tot slot wordt het weer doorgeschoven en twee keer zo groot getekend op het vel A3-papier. Elk groepje heeft nu drie figuren in drie maten. Hiermee moet een poster gemaakt worden over vergroten; ***zie foto 1***.
Muzikaal ritmisch – Deze leerling pikt snel ritmes op en houdt van ezelsbruggetjes. Eerlijk gezegd komt muzikaal ritmisch het minst aan de orde tijdens de les. Het opdreunen van tafels op de basisschool is een voorbeeld van muzikaal ritmisch leren. Een ezelsbruggetje voor het onthouden van het getal pi: *How I like a drink, pepsicola of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics* (het aantal letters van elk woord stelt een cijfer voor: 3,14159265358979).
Lichamelijk motorisch – Deze leerlingen leren door doen en spelen. Wij gebruiken deze intelligentie vrij veel en hebben dan ook veel materialen op school. Bij de ruimtelijke figuren zijn de leerlingen bezig met 'zometool' en 'polydron' en bouwen de figuren om zo te leren. Veel foto's uit het wiskundeboek hebben wij in het echt op school, je kan het vastpakken en omdraaien en van alle kanten bekijken.
Naturalistisch – Leerlingen die houden van de natuur, planten en dieren, en graag ordenen. Een PowerPoint laten maken als overzicht van een hoofdstuk past goed bij deze groep leerlingen.
Intra personale leerlingen stellen zich graag op de achtergrond. Ze kennen hun eigen sterke en zwakke kanten goed. Deze leerlingen hebben af en toe de tijd nodig om even na te denken.
Taalkundig – Deze groep leert met woorden en formuleren makkelijk. Tijdens een les rekenen met de rekenmachine moeten de leerlingen vijf woorden bedenken die je kunt maken op een rekenmachine die je omdraait. Je hebt maar een beperkt aantal letters tot je beschikking. Taalkundige leerlingen bedenken woorden als *biologieles en zielige.* Daarna moeten er sommen bedacht worden waarvan dat woord het antwoord is. Vervolgens bedenken de leerlingen een kort verhaaltje waarin de vijf woorden ontbreken. Door de sommen te maken kom je achter het ontbrekende woord.


foto 1

De intelligenties in de wiskundeles

Bij elk hoofdstuk van ons wiskundeboek hebben we opdrachten voor minstens twee intelligenties bedacht. Deze opdrachten oefenen vaardigheden of verdiepen de lesstof. Ze zijn wel allemaal motiverend doordat ze leuk zijn en verbazen (zie *Euclides* jrg. 84, nr. 4). De leerlingen maken de gewone wiskundetoetsen die bij de methode horen. Op school is wel een discussie gaande over het 'anders' toetsen, maar veel docenten durven het niet aan; want hoe beoordeel je dan? Dat is inderdaad een groot probleem: als je een hoofdstuk per intelligentie af laat sluiten, kun je de leerlingen niet meer vergelijken en is de beoordeling moeilijk objectief te houden. Toch is er vraag naar zo'n afsluiting door zowel de school als de leerlingen en hun ouders, die immers bewust voor deze opleiding gekozen hebben.

Intelligentie toetsen

Bij wiskunde wordt er veel gedaan aan de meervoudige intelligenties, dus lag het voor de hand dat wij ook een keer meervoudig gingen toetsen. Ik besloot het gewoon te durven, maar koos wel voor een veilig hoofdstuk in de derde klas: Parabolen tekenen en de *abc*-formule. (Twee hoofdstukken later komt dit allemaal weer aan de orde bij het snijden, raken en missen van lijnen aan een parabool en dan wordt alles dan toch getoetst.) Nu moesten er alleen nog toetsopdrachten bedacht worden per intelligentie. Ik besloot de opdrachten vrij open te houden, maar de normering wel vast te leggen:

De Y-as

Om het snijpunt van de y-as te ontdekken,
Moet je de volgende formule gebruiken.

D = b² – 4ac.
Is dat lastig, ach wat nee.

Je vult de abc's goed in,
Dan heb je al een stevig begin.

Je typt de formule in je rekenmachien
En het antwoord zal je zien!

Ik zal je een trucje geven
Waardoor je dit zal onthouden je hele leven.

Als je het boekje snapt tot hier,
Zal je cijfer zijn een vier.

foto 2



foto 3



foto 4



foto 5

- hoe ziet het functievoorschrift eruit	10%
- berg- of dalparabool	5%
- snijpunt met de y-as	10%
- snijpunten met de *x*-as	10%
- ontbinden in factoren	15%
- discriminant	15%
- *abc*-formule	15%
- symmetrie-as	10%
- top	10%

De opdrachten bedenken per intelligentie is wat lastiger. Dit is het (in het kort) geworden:

Interpersoonlijk:	Maak een spel waarmee je dit hoofdstuk kunt oefenen.
Intra personale:	Maak een toets over dit hoofdstuk die in de gewone vwo-klas afgenomen kan worden.
Logisch wiskundig:	Maak een bijlesboekje over bij dit hoofdstuk.
Naturalistisch:	Maak een PowerPoint-presentatie.
Visueel ruimtelijk:	Maak een poster.
Muzikaal ritmisch:	Componeer een lied; het refrein moet de abc-formule zijn; ***zie foto 2.***
Taalkundig:	Schrijf een verhaal.
Lichamelijk motorisch:	Maak een film van de baan van een bal die in de lucht gegooid wordt. Bepaal de formule van die baan.

Het resultaat wordt gepresenteerd tijdens een tentoonstelling. Om ervoor te zorgen dat de leerlingen echt voor een intelligentie kozen en niet voor de leukste opdracht, moesten ze van te voren twee intelligenties opgeven. Uit die twee werd gekozen. Als ze een betere opdracht wisten binnen de intelligentie, mochten ze in overleg met mij de opdracht aanpassen.
De leerlingen kregen twee blokuren om aan de presentatie te werken.

Het proces

Ik had hoge verwachtingen van het lied. Immers de intelligentie komt niet zoveel aan bod en er zit een heuse band in de klas. De grote tegenvaller was dan ook dat ze het toch niet aandurfden en gingen voor de andere intelligentie. De taalkundigen kwamen naar me toe met de vraag of het ook een gedicht of een strip mocht zijn. De strip werd getekend door mijn zwakste leerling, ik hield mijn hart vast, maar zette wel door; ***zie foto 3***.
De visueel ruimtelijken wilden niet alleen een poster maken. Zo ontstond er een groepje dat met speciale verf allerlei stickers heeft gemaakt, die op de ramen geplakt moeten worden; ***zie foto 4***.
Een ander groepje maakte liever een poppenkast. Een logisch wiskundige jongen wilde het een en ander programmeren in Excel. Hij maakte een programma waarvan een motorisch groepje gebruik kon maken om de baan van de bal te berekenen. Er ontstond een samenwerking tussen de twee groepjes.
Tot mijn grote verbazing vonden de leerlingen de vrije opdrachten heerlijk: tijdens de les hoefde ik eigenlijk niets te doen, behalve helpen met de problemen waar ze tegen aan liepen. De hele week kwamen er in vrije uren leerlingen naar me toe of ze door mochten werken en kreeg ik van alles onder mijn neus gedrukt voor een tussentijdse beoordeling. Wat ik te zien kreeg overtrof mijn verwachtingen en ik krijg dus zeker problemen met het beoordelen: hoe zorg ik er voor dat de cijfers niet te hoog uitpakken?

De resultaten

De stickerposters op mijn ramen zijn heel mooi geworden. Er is ook veel meer tijd in gaan zitten doordat het maken van alle stickers een hele zaterdag in beslag nam. Het computerprogramma werkt ook heel goed. Je moet de *a*, *b* en *c* van een formule geven en alles wordt uitgerekend en getekend. Twee taalkundige meisjes hebben een stukje uit een meidenblad gebruikt voor hun verhaal. Een meisje schrijft dat ze te snel opgewonden wordt. Het blad antwoordt dat ze dan aan wiskunde moet



denken. Het hele verhaal gaat over de vriendschap tussen het meisje en haar vriend, en waar ze allemaal aan denkt om nuchter te blijven. Origineel plot dat de klas erg leuk vond.
De motorische groepen hebben tijdens de gymles mogen filmen en kregen daar ook hulp met het computerprogramma dat van de film een grafiek maakt. Zij deden al het rekenwerk andersom. Ze hadden de snijpunten met de x-as en de top, en bepaalden hiermee de formule. De bijles boekjes vonden gretig aftrek, de leerlingen die wiskunde moeilijk vinden, dachten er echt iets aan te hebben. Ook de spellen werden gespeeld. Het monopoly-achtige spel was erg leuk (***zie foto 5***). Om geld te verdienen moest je opgaven maken.

Het normeren

Het moeilijkst bleek toch het normeren van deze resultaten. Er werden wel fouten gemaakt: zo had het poppenkastduo de *abc*-formule verkeerd ingetikt op de rekenmachine, de meisjes van het tijdschrift hadden als snijpunten met de x-as (2, 4) opgeschreven in plaats van (2, 0) en (4, 0), en hier en daar was de algemene formule vergeten. Wat me verbaasde was dat de leerlingen veel meer dan anders wilden weten wat er fout was, ze wilden echt foutloze producten inleveren. Waar mogelijk werden fouten alsnog verbeterd (zonder het cijfer te beïnvloeden uiteraard). De cijfers zijn wel wat hoger uitgevallen dan normaal, maar er vielen wel gewoon onvoldoendes. Over twee hoofdstukken komt het vervolg op dit hoofdstuk en dan zal ik zien of de resultaten inderdaad te hoog zijn uitgevallen.

Conclusie

De tentoonstelling was een groot succes. De leerlingen vonden het leuk om werk van elkaar te bekijken en te beoordelen, maar ook diverse collega's kwamen langs om te kijken. Er werd veel waardering uitgesproken, en ook van ouders kreeg ik positieve reacties op de tafeltjesavond. De leerlingen die onvoldoende scoorden, konden goed aangeven waar het misging. De meesten hebben nog verbeteringen aangebracht, al had dat geen invloed meer op het cijfer.
Tijdens het nabespreken gaven de leerlingen aan dat ze dit een leuke manier van leren vonden, maar dat ze wel op moesten letten dat de opdracht niet belangrijker werd dan de lesstof. Dit zal ik volgend jaar van te voren met de leerlingen bespreken, de opdrachten laat ik zoals ze zijn.

Over de auteur

Ingrid Berwald is docente wiskunde aan het IJsselcollege in Capelle aan den IJssel. Ze geeft les aan vmbo-, havo- en vwo-klassen en vindt het belangrijk dat alle leerlingen positieve ervaringen op doen tijdens het vak wiskunde.
E-mailadres: *i.berwald@ijsselcollege.nl*

Exittoets algebraïsche vaardigheden bij vwo A

[Peter Kop en Rob van Oord, namens de Werkgroep HAVO/VWO]

Entreetoets en exittoets

De laatste jaren is er veel onvrede in het hoger onderwijs over het beheersingsniveau van de algebraïsche vaardigheden van beginnende studenten. Dit verschijnsel treedt op bij vele bèta en economische studierichtingen. Het gevolg is dat er zogenoemde entreetoetsen bij aanvang van de studie worden afgenomen. Deze toetsen vertonen een grote diversiteit en werden kritisch becommentarieerd vanuit het voortgezet onderwijs. De kritiek betrof zowel de inhoud als de formulering van de vragen.
Voor zowel het hoger onderwijs als het voortgezet onderwijs is het van belang om te bepalen wat het niveau van de algebraïsche vaardigheden is. Na de exittoets voor vwo B [1], die vorig jaar door de Werkgroep HAVO/VWO van de NVvW werd gemaakt, is nu een exittoets voor vwo A geformuleerd (***zie pagina 68***). Deze exittoets voor wiskunde A is een poging om vanuit het voortgezet onderwijs te formuleren om welke vaardigheden het gaat en op welke wijze deze in het voortgezet onderwijs getoetst worden.
Met deze actie probeert de werkgroep een constructieve bijdrage te leveren aan de discussie over de aansluitingsproblematiek van voortgezet onderwijs naar hoger onderwijs.

Algebra en wiskunde A

In de algebraparagraaf van het PEP 2007 examenprogramma staat de volgende alinea.

De eisen die aan de wiskunde A-kandidaten worden gesteld ten aanzien van het gebruiken van algebra zullen voornamelijk gekoppeld zijn aan het oplossen van contextproblemen. In die zin verschillen de eisen die aan een wiskunde A-kandidaat worden gesteld aanzienlijk van de eisen op het gebied van algebra die worden gesteld aan wiskunde B-kandidaten.

In de paragraaf wordt uitgebreid een aantal specifieke algebraïsche vaardigheden genoemd die een A-leerling geacht wordt te beheersen, zoals het rekenen met breukvormen en het oplossen van vergelijkingen. Daarnaast is er expliciete aandacht voor algemene algebraïsche vaardigheden.
Op basis van voorbeelden uit de algebraparagraaf en de voorbeeldopgaven van PEP 2007 [2] en de eindexamens van de afgelopen jaren, heeft de werkgroep opgaven geformuleerd die haalbaar zouden moeten zijn voor de A-leerlingen en die passen binnen het eindexamenprogramma van wiskunde A. Er zijn twee aandachtspunten die speciaal voor wiskunde A gelden.
Ten eerste zijn de opgaven bij wiskunde A-eindexamens altijd in een context en zijn de entreetoetsen juist zonder context geformuleerd.
Ten tweede is in het voortgezet onderwijs de grafische rekenmachine een natuurlijk hulpmiddel, en het is niet direct duidelijk hoe deze het werk van leerlingen beïnvloedt. Ook wanneer docenten niet direct zien hoe leerlingen bij bepaalde opgaven 'iets' aan de grafische rekenmachine hebben, kan de grafische rekenmachine wel een belangrijke rol spelen. Een leerling kan bijvoorbeeld bij de afgeleide van $f(x)=2^x$ zijn idee, bijvoorbeeld $f'(x)=x\cdot 2^{x-1}$, controleren met behulp van de grafische rekenmachine en zien dat zijn idee fout is.

Bij de door ons geformuleerde exittoets is het gebruik van de grafische rekenmachine *niet* toegestaan; door deze keuze sluiten we aan bij de praktijk die de universiteiten hanteren bij hun entreetoetsen.
Met betrekking tot de contexten kiezen we ervoor vooral het 'nut' van algebra te illustreren. Daarvoor is onderstaande lijst opgesteld die moet laten zien om welke algebraïsche vaardigheden het bij wiskunde A zou moeten gaan. Uitgangspunt is uiteraard het huidige eindexamenprogramma.

Vaardigheden

A. Beheersing van reken en voorrangsregels, het gewone cijferrekenen:
- bij uitrekenen zonder rekenmachine;
- bij getal invullen in een formule.

B. Kennis van elementaire concepten en elementair algebraïsch manipuleren
1. Getalbegrip:
- een positief getal dat vermenigvuldigd wordt met een getal kleiner dan 1 geeft een kleinere uitkomst;
- een positief getal dat gedeeld wordt door een getal groter dan 1 geeft een kleinere uitkomst;
- $a\cdot b^{-p}$ is te schrijven als $\frac{a}{b^p}$;
- ${}^{2}\log a=b$ is gelijkwaardig met $2^b=a$.
2. Rekenregels bij:
- breuken en machten;
- logaritmen en differentiëren.
3. Herschrijven van een formule:
- door haakjes weg te werken of te plaatsen;
- tot een breuk of door een breuk te splitsen.
4. Vergelijkingen oplossen:
- stelsels lineaire vergelijkingen;
- inverse bewerkingen bij lineaire, exponentiële, logaritmische en machtsfuncties;
- werken met recht en omgekeerd evenredige verbanden;
- betekenis weten van oplossingen van vergelijkingen in verband met grafieken.

C. Inzicht in formules om o.a. het verband tussen formule en grafiek te begrijpen en te verklaren
Vragen over:
- het opstellen van de formule van een lineair of exponentieel verband;
- de grootte van y bij groot wordende x;
- asymptotisch gedrag van een grafiek;
- het dalen/stijgen van een grafiek van een functie aan de hand van een formule;
- (*zonder* differentiëren) het minimum/maximum van een functie.

D. Algebra om het werk eenvoudiger (efficiënter) te maken
Formules anders schrijven:
- zodat je met minder rekenwerk een *x*-waarde kan invullen;
- zodat je handiger kunt differentiëren;
- zodat je de betekenis van een formule beter doorziet.

E. Verifiëren met algebra:
- algebra om te bewijzen en te generaliseren;
- maar ook algebraïseren d.w.z. het mathematiseren van een situatie door het opstellen van een formule of vergelijking.

Bij het opstellen en formuleren van de opgaven van de exittoets hebben deze aspecten een belangrijke rol gespeeld en is een exittoets ontstaan die als het ware een uitvergroting is van de algebraïsche vaardigheden in een centraal schriftelijk eindexamen (CSE). Uiteraard blijven allerlei andere aspecten van een CSE door deze uitvergroting onderbelicht en is zo'n exittoets nooit een vervanging van het CSE. De huidige lichting A12-leerlingen zal nog niet gewend zijn aan dit soort vragen. Dit bleek ook bij het uittesten van deze exittoetsen: de resultaten vielen niet mee. We mogen verwachten dat meer aandacht voor algebraïsche vaardigheden zal leiden tot betere resultaten. De Werkgroep HAVO/VWO verwacht dat op een termijn van twee jaar onderwijsveld en leerlingen meer gevoel ontwikkelen voor dit soort toetsing. Daarna lijkt het redelijk te eisen dat leerlingen dit soort opgaven daad werkelijk met behoorlijk succes kunnen maken.

Samenvatting

Alle uitgangspunten voor een exittoets nog eens op een rijtje.
- De exittoetsen zijn slechts bedoeld voor diagnostisch gebruik.
- De toetsen zijn niet bedoeld als vervanging voor het huidige CSE. Op een CSE worden naast enkelvoudige algebraïsche vaardigheden ook andere vaardigheden getoetst, waarbij het antwoord gevonden moet worden met mogelijk meer (denk)stappen (zie PEP 2007); op het centraal examen heeft de leerling ook de beschikking over een grafische rekenmachine; bij de door ons voorgestelde toetsen worden specifieke algebraïsche basisvaardigheden met slechts enkele (denk)stappen afgevraagd.
- De toetsen dienen de docent en leerling inzicht te geven in de specifieke algebraïsche basisvaardigheden die passen bij het huidige A-programma.
- De vragen zijn zo gesteld dat voor de leerlingen herkenbaar is wat van hen verwacht wordt bij het beantwoorden ervan.
- De toetsen bestaan, bij voorkeur, uit open vragen.
- Leerlingen hebben royaal de tijd om de toets te maken; uitgangspunt is maximaal 15 vragen in 60 minuten.
- Het rekenwerk blijft beperkt omdat zonder grafische rekenmachine gewerkt wordt.
- Een gegeven is dat de huidige A-leerling niet snel een grafiekje kan produceren; behalve bij vragen over standaard-grafieken is het aan te bevelen, waar nodig, de grafiek(en) bij de opgave te zetten.
- De exittoetsen zijn op dit moment slechts richtinggevend omdat de huidige lichting wiskunde A12-leerlingen niet getraind zijn in dit soort toetsen. De Werkgroep HAVO/VWO verwacht dat het veld zo'n twee jaar tijd nodig zal hebben om hieraan te wennen.
- Het doel en nut van algebra zal juist voor deze A-leerlingen duidelijk zichtbaar moeten zijn.

Vervolg

Deze exittoets is door het bestuur van de NVvW aangenomen. Inmiddels is van de kant van het NKBW-project [3] positief gereageerd op deze exittoets. In het NKBW-project staat de aansluiting voortgezet onderwijs naar hoger onderwijs met betrekking tot wiskundige (lees algebraïsche) vaardigheden centraal. De toetsen die in dit kader ontwikkeld worden, nemen de exittoets als uitgangspunt.

Daarmee is dit project 'exittoets' niet klaar. Iedereen die meent iets over deze toets of het fenomeen exittoets voor wiskunde A te willen zeggen, wordt nadrukkelijk uitgenodigd te reageren bij één van de auteurs.

Noten

[1] Exittoets wiskunde B VWO. Op: *www.nvvw.nl/media/downloads/werkgroep_havo_vwo/exittoetsen_nvvw_270507.pdf*
[2] Syllabus Centraal Examen PEP 2007 met algebraparagraaf en voorbeeld-opgaven. Op: *www.digischool.nl/wi/wiscom/examenprog-2007.htm*
[3] NKBW2 (Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde). Zie: *www.fi.uu.nl/wiki/index.php/Categorie:Nkbw*

Over de auteurs

Peter Kop is lid van de Werkgroep HAVO/VWO en werkzaam als docent aan de GSG LeoVroman te Gouda en als vakdidacticus bij het ICLON (universitaire lerarenopleiding) te Leiden.
E-mailadres: *koppmgm@iclon.leidenuniv.nl*
Rob van Oord is voorzitter van de Werkgroep HAVO/VWO en werkzaam als docent aan het Coenecoop College in Waddinxveen.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

Exittoets VWO A (versie 28-10-08)

Algebraïsche vaardigheden / 60 minuten

Beantwoord alle vragen *zonder* gebruik te maken van een grafische rekenmachine.

Opgave 1
Neem over en vul >, < of = in op …
- $1500 \cdot 0,98 \cdot 0,97 \; \ldots \; 1500$
- $\dfrac{1500}{z + z} \; \ldots \; 1500$
- $1500 \cdot 0,9^3 \; \ldots \; 1500 \cdot 0,9^2$

Opgave 2
Stel een formule op van de rechte lijn door de punten (5, 17) en (15, 24).

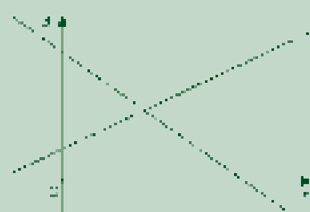
Opgave 3
Herschrijf de formule $y = \dfrac{5}{x} \cdot \dfrac{6}{x} \cdot \dfrac{30}{x}$ in de vorm $y = a \cdot x^n$.

Opgave 4
Los op met behulp van ontbinden:
- $x^2 - 11x + 24 = 0$
- $0,8a - 0,005a^2 = 0$

Opgave 5
Gegeven zijn formules $P = x^3 \cdot y^2 \cdot z$, $y = 2 \cdot x$ en $z = 3 \cdot x$.
Druk P uit in x en schrijf de formule dan in de vorm $P = a \cdot x^n$.

Opgave 6
Los op voor welke x en welke y geldt dat $\begin{cases} 3x + 2y = 21 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$

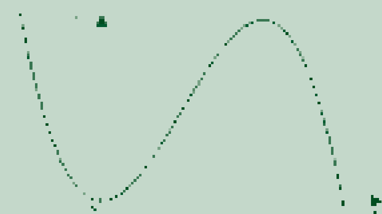
Opgave 7
In de figuur hieronder zie je in een assenstelsel de lijnen $y_1 = -3x + 20$ en $y_2 = 2x - 5$ getekend.



Los de ongelijkheid $y_1 > y_2$ op.

Opgave 8
Differentieer de volgende functies:
- $f(x) = 2 \cdot (4x^2 - 1) + x$
- $K(q) = 3q^{-1} + 4\sqrt{q}$

Opgave 9
Hieronder zie je in een assenstelsel de grafiek van $f(x) = 36x^2 - 4x^3$ getekend.



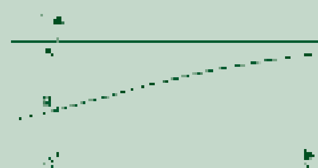
Bereken met behulp van differentiëren bij welke x-waarde $f(x)$ een maximum heeft.

Opgave 10
De grafiek van $y = (x - 2)^2 - x(x - 5)$ is een rechte lijn.
Toon dit aan door y te schrijven in de vorm $y = ax + b$.

Opgave 11
Gegeven is de formule $H = \dfrac{6 \cdot T^2}{2 \cdot R}$.
Maak een formule waarin je R uitdrukt in T en H (dus $R = \ldots$).

Opgave 12
Gegeven is $2 \cdot \log(N) = 240 - 6 \cdot L$.
Druk N uit in L, en schrijf $N = a \cdot g^L$.

Opgave 13
Hieronder zie je in een assenstelsel de grafiek van $f(x) = \dfrac{600}{30 + 30 \cdot 0,8^x}$ en zijn asymptoot getekend.



A is het snijpunt van de asymptoot met de y-as en B is het snijpunt van de grafiek van $f(x)$ met de y-as.
- Hoe groot zijn de y-waarden van de punten A en B. Licht je antwoord toe.
- Onderzoek aan de hand van de formule of de grafiek van $f(x)$ steeds stijgt. Licht je bevinding toe.

Een rij van cosinussen

DRIE BEWIJZEN VAN EEN NIET ZO BEKENDE FORMULE

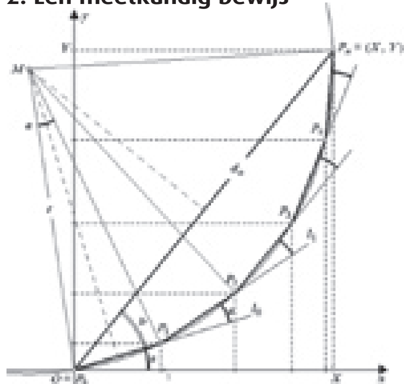
[Dick Klingens]

1. Doel

We bekijken de som van de eerste n elementen van de rij getallen:
$\cos a$, $\cos 2a$, $\cos 3a$, …, $\cos na$, …
met a reëel, n geheel en $n \geq 1$.
In de paragrafen 2, 4 en 5 zullen we verschillende bewijzen geven van de formule:

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos na = \cos\left(\tfrac{1}{2}(n+1)a\right) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}na}{\sin \frac{1}{2}a}$$

2. Een meetkundig bewijs



figuur 1

We kiezen in een rechthoekig assenstelsel xOy een halve lijn l_0 die het punt $O = P_0$ als beginpunt heeft en die een hoek a maakt met de positieve x-as (***zie figuur 1***). Op die lijn ligt het punt P_1 zó, dat $OP_1 = 1$.
De lijn l_1 is het beeld van de lijn l_0 bij een (positieve) rotatie om het punt P_1 over de hoek a.
Op l_1 ligt het punt P_2 zó, dat ook $P_1P_2 = 1$.
De punten P_3, P_4, …, P_n worden analoog geconstrueerd. Er geldt dus:
$\angle(l_0, l_1) = \angle(l_1, l_2) = \ldots = \angle(l_{n-2}, l_{n-1}) = a$
en:
$P_0P_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \ldots = P_{n-1}P_n = 1$
Gevolg: de lijn l_k (met $k = 0, 1, \ldots, n-1$) maakt een hoek $(k+1)a$ met de (positieve) x-as.
Zijn nu (X, Y) de coördinaten van het punt P_n. Dan is X gelijk aan de som van de projecties van de lijnstukken $P_{k-1}P_k$ op de x-as; met andere woorden:

$$\boldsymbol{X = \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos na}$$

Opmerking. Analoog geldt voor de som van de projecties van die lijnstukken op de y-as:
$Y = \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin na$

De middelloodlijn van P_0P_1 snijdt die van P_1P_2 in het punt M. Op basis van de constructie zijn de gelijkbenige driehoeken P_0P_1M en P_1P_2M congruent (ZZZ).
Daaruit volgt dan dat:
$\angle P_0P_1M = \angle P_2P_1M = p$
De gestrekte hoek bij P_1 die valt langs de lijn l_0, wordt gevormd door die beide hoeken (met grootte p) en de hoek a, zodat $\angle P_0MP_1 = \angle P_1MP_2 = a$.

Eenvoudig kan, ook weer via congruentie van driehoeken (ZHZ), bewezen worden dat:
$\angle P_2MP_3 = \ldots = \angle P_{n-1}MP_n = a$ en dat: $MP_2 = MP_3 = \ldots = MP_n$

De punten P_0, P_1, …, P_n liggen daarmee alle op de cirkel met middelpunt M en straal $MO = r$.

Dit biedt de mogelijkheid de waarde van X (en, indien gewenst, ook die van Y) op een andere manier te berekenen. Is namelijk $d_n = OP_n$, dan is in de gelijkbenige driehoek OP_nM, waarvan de tophoek gelijk is aan na:

$$d_n = 2r \sin \tfrac{na}{2}$$

En in de gelijkbenige driehoek OP_1M is:

$$1 = 2r \sin \tfrac{a}{2}$$

Deling van de laatste twee uitdrukkingen geeft:

$$d_n = \frac{\sin \frac{1}{2}na}{\sin \frac{1}{2}a}$$

In driehoek OXP_n stellen we $\angle O = a + b$ waarbij $b = ½\text{bg}(P_1P_n) = ½(n-1)a$, zodat:
$\angle O = ½(n+1)a$. En dat betekent in die driehoek:

$$\frac{X}{d_n} = \cos\left(\tfrac{1}{2}(n+1)a\right)$$

Met als gevolg:

$$X = \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos na = \cos\left(\tfrac{1}{2}(n+1)a\right) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}na}{\sin \frac{1}{2}a}$$

Opmerking. De lezer wordt aangemoedigd, op dezelfde manier als hierboven, een uitdrukking voor de coördinaat Y van het punt P_n te vinden.

3. Formules van Simpson

In de paragrafen 4 en 5 zullen we een aantal keren gebruik maken van de zogenoemde *formules van Simpson* [1] (ook wel *som-produkt-formules* of *goniometrische produktformules*). We zetten deze formules – die in het huidige onderwijs niet zo vaak meer worden gebruikt – nog even onder elkaar:

(1)… $\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{1}{2}(p+q) \cdot \cos\tfrac{1}{2}(p-q)$
(2)… $\sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{1}{2}(p-q) \cdot \cos\tfrac{1}{2}(p+q)$
(3)… $\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{1}{2}(p+q) \cdot \cos\tfrac{1}{2}(p-q)$
(4)… $\cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{1}{2}(p-q) \cdot \sin\tfrac{1}{2}(p+q)$

4. Op de manier van de jonge Gauss

We schrijven de uitdrukking voor X (zie paragraaf 2) twee keer onder elkaar op, de tweede keer van achter naar voor [2]:

$$X = \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(n-1)a + \cos na$$
$$X = \cos na + \cos(n-1)a + \ldots + \cos 2a + \cos a$$

Met formule (3), uit paragraaf 3, toegepast op de termen die in beide vormen van X direct onder elkaar staan, vinden we nu door optelling:

$$2X = \left(2\cos\tfrac{1}{2}(n+1)a \cdot \cos\tfrac{1}{2}(1-n)a\right) + \left(2\cos\tfrac{1}{2}(n+1)a \cdot \cos\tfrac{1}{2}(3-n)a\right) + \ldots + \\ + \left(2\cos\tfrac{1}{2}(n+1)a \cdot \cos\tfrac{1}{2}(n-3)a\right) + \left(2\cos\tfrac{1}{2}(n+1)a \cdot \cos\tfrac{1}{2}(n-1)a\right)$$

Zodat:

$$X = \cos\left(\tfrac{1}{2}(n+1)a\right) \cdot \left(\cos\tfrac{1}{2}(1-n)a + \cos\tfrac{1}{2}(3-n)a + \ldots + \\ + \cos\tfrac{1}{2}(n-3)a + \cos\tfrac{1}{2}(n-1)a\right)$$

Vermenigvuldiging (en natuurlijk ook weer deling) van de tweede factor F van X met $2\sin(\frac{1}{2}a)$ geeft dan voor die factor:

$$F=\frac{1}{2\sin(\frac{1}{2}a)}\cdot\left(2\sin(\tfrac{1}{2}a)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(1-n)a+2\sin(\tfrac{1}{2}a)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(3-n)a+\ldots+\right.$$
$$\left.+2\sin(\tfrac{1}{2}a)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(n-3)a+2\sin(\tfrac{1}{2}a)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(n-1)a\right)$$

Met Simpson's formule (1) levert dit:

$$F=\frac{1}{2\sin(\frac{1}{2}a)}\cdot\left(\left(\sin(1-\tfrac{1}{2}n)a+\sin(\tfrac{1}{2}na)\right)+\left(\sin(2-\tfrac{1}{2}n)a+\sin(\text{-}1+\tfrac{1}{2}n)a\right)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\left(\sin(\tfrac{1}{2}n-1)a+\sin(\tfrac{1}{2}n-2)a\right)+\left(\sin(\tfrac{1}{2}na)+\sin(1-\tfrac{1}{2}n)a\right)\right)$$

In de tweede factor van F komt de term $\sin(\frac{1}{2}na)$ twee keer voor, terwijl de andere termen vanwege de eigenschap dat $\sin p=\text{-}\sin(\text{-}p)$ is, twee aan twee tegen elkaar wegvallen. Gevolg:

$$F=\frac{1}{2\sin(\frac{1}{2}a)}\cdot\left(2\sin(\tfrac{1}{2}na)\right)=\frac{\sin\frac{1}{2}na}{\sin\frac{1}{2}a}$$

En dan is, zoals we ook als eerder in het meetkundige bewijs in paragraaf 2 hebben gezien:

$$X=\cos\left(\tfrac{1}{2}(n+1)a\right)\cdot F=\cos\left(\tfrac{1}{2}(n+1)a\right)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}na}{\sin\frac{1}{2}a}$$

5. Met complexe getallen

We bekijken, hier gebruik makend van complexe getallen, de uitdrukking:

$$S=e^{i\cdot a}+e^{i\cdot 2a}+e^{i\cdot 3a}+\ldots+e^{i\cdot na}$$

We zien dat S de som is van n opvolgende termen van een meetkundige rij met *reden* gelijk aan e^{ia}, zodat:

$$S=e^{ia}\cdot\frac{(e^{ia})^n-1}{e^{ia}-1}=\frac{(e^{ia})^{n+1}-e^{ia}}{e^{ia}-1}$$

Een bekende formule in de theorie van de complexe getallen, de *formule* (*identiteit*) *van Euler*[3], luidt:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$$

Met die formule vinden we voor S:

$$S=\frac{\left(\cos(n+1)a+i\cdot\sin(n+1)a\right)-\left(\cos a+i\cdot\sin a\right)}{(\cos a+i\cdot\sin a)-1}$$

En dan is, gebruik makend van Simpson's formules (4) en (2):

$$S=\frac{\text{-}2\sin\frac{1}{2}(n+2)a\cdot\sin(\frac{1}{2}na)+i\cdot\left(2\sin(\frac{1}{2}na)\cdot\cos\frac{1}{2}(n+2)a\right)}{(\cos a-1)+i\cdot\sin a}$$

of:

$$S=\sin(\tfrac{1}{2}na)\cdot\frac{\text{-}2\sin\frac{1}{2}(n+2)a+i\cdot 2\cos\frac{1}{2}(n+2)a}{(\cos a-1)+i\cdot\sin a}$$

Met de gebruikelijke handelwijze ('truc') bij het rekenen met complexe getallen (hier: teller en noemer van de tweede factor van S vermenigvuldigen met hetzelfde getal) volgt:

$$(*)\ldots\quad S=\sin(\tfrac{1}{2}na)\cdot\frac{\left(\text{-}2\sin\frac{1}{2}(n+2)a+i\cdot 2\cos\frac{1}{2}(n+2)a\right)\cdot\left((\cos a-1)-i\cdot\sin a\right)}{(\cos a-1)^2+\sin^2 a}$$

Voor het *reële deel* T van de *teller* van de tweede factor van S hebben we dan:

$$\begin{aligned}T&=\text{-}2\sin\left(\tfrac{1}{2}(n+2)a\right)\cdot(\cos a-1)+2\sin a\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}(n+2)a\right)=\\&=\text{-}2\sin\left(\tfrac{1}{2}(n+2)a\right)\cdot\cos a+2\sin\left(\tfrac{1}{2}(n+2)a\right)+2\sin a\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}(n+2)a\right)\\&=\text{-}2\left(\sin\left(\tfrac{1}{2}(n+2)a\right)\cdot\cos a-\sin a\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}(n+2)a\right)\right)+2\sin\left(\tfrac{1}{2}(n+2)a\right)\end{aligned}$$

Toepassing van de formule:

$\sin p\cdot\cos q-\sin q\cdot\cos p=\sin(p-q)$

op de eerste term van de laatst gevonden uitdrukking voor T leidt tot:

$$\begin{aligned}T&=\text{-}2\sin(\tfrac{1}{2}na)+2\sin\left(\tfrac{1}{2}(n+2)a\right)\\&=\text{-}2\left(\sin(\tfrac{1}{2}na)-\sin\left(\tfrac{1}{2}(n+2)a\right)\right)\end{aligned}$$

Zodat, weer met formule (2):

$$T=\text{-}4\sin(\text{-}\tfrac{1}{2}a)\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}(n+1)a\right)=4\sin(\tfrac{1}{2}a)\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}(n+1)a\right)$$

De *noemer* N van de tweede factor in uitdrukking (*) – en die noemer is *reëel* – laat zich met wat bekendere formules herleiden:

$$\begin{aligned}N&=(\cos a-1)^2+\sin^2 a=\cos^2 a-2\cos a+1+\sin^2 a\\&=2-2\cos a=2(1-\cos a)=2\cdot 2\sin^2(\tfrac{1}{2}a)\\&=4\sin^2(\tfrac{1}{2}a)\end{aligned}$$

Het reële deel R van S, zie weer (*), is nu te schrijven als:

$$\begin{aligned}R&=\sin(\tfrac{1}{2}na)\cdot\frac{T}{N}=\sin(\tfrac{1}{2}na)\cdot\frac{4\sin(\frac{1}{2}a)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}(n+1)a\right)}{4\sin^2(\frac{1}{2}a)}\\&=\cos\left(\tfrac{1}{2}(n+1)a\right)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}na}{\sin\frac{1}{2}a}\end{aligned}$$

Uit:

$$S=e^{i\,a}+e^{i\cdot 2a}+e^{i\cdot 3a}+\ldots+e^{i\cdot na}$$

volgt met de formule van Euler dat voor het reële deel R van S ook geldt:

$$R=\cos a+\cos 2a+\ldots+\cos na$$

En daarmee is ten derde male het in paragraaf 1 genoemde doel bereikt.

Noten

[1] De formules zijn genoemd naar Thomas Simpson (1710-1761, Engeland). Voor een bewijs van deze formules zie bijvoorbeeld:
» Dick Klingens (2004): *Formules van Simpson*. Op: *www.pandd.nl/cirkels/simpson.htm*

[2] Naar verluidt telde Carl Friedrich Gauss (1777-1855, Duitsland) op 7-jarige leeftijd de getallen 1 tot en met 100 op door ze in tweetallen (1+100, 2+99, …) samen te nemen.

[3] Naar Leonhard Euler (1707-1783, Zwitserland). Voor een toelichting op de formule zie:
» MathAdore: *Complexe getallen*. Digitaal lesmateriaal beschikbaar via: *www.math4all.nl/MathAdore/vd-e23.html*
» Jan van de Craats (2008): *Complexe getallen voor Wiskunde D*. Digitaal beschikbaar via: *http://staff.science.uva.nl/~craats/CGnieuw.pdf*
» Kerngroep Wiskunde D Eindhoven: *Wat? Nog meer getallen!* Digitaal beschikbaar via: *www.win.tue.nl/wiskunded/?q=node/2*

Literatuur

- E.W. Hobson (1928): *A Treatise on Plane and Advanced Trigonometry*. New York: Dover Publications Inc. (herdruk 2005, Dover Phoenix Editions).
- E. Maior (1998): *Trigonometric Delights*. Princeton (NJ): Princeton University Press.

Over de auteur

Dick Klingens is verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Daarnaast is hij eindredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *dklingens@pandd.nl*

Vanuit de oude doos

[Ton Lecluse]

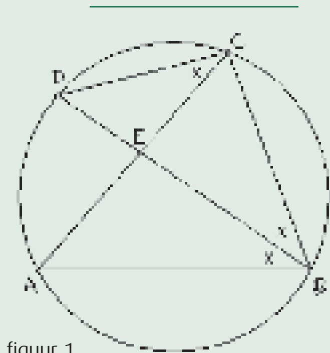
Ton Lecluse is docent wiskunde en heeft een doos met oude schoolboeken uit de vorige eeuw, waar hij graag in neust. Hij vindt vaak mooie opgaven (zonder uitwerking gelukkig) die hem uitdagen een oplossing te zoeken die past in het huidige curriculum. In de rubriek 'Vanuit de oude doos' wordt in elke aflevering een juweeltje behandeld. U kunt er uw lessen mee verrijken

Een constructie

Naar aanleiding van een toelatingsexamen wiskunde tot de universiteiten in 1929; de eigenlijke opgave, letterlijk:

De bissectrix van $\angle B$ snijdt de omgeschreven cirkel van ΔABC in D, de zijde AC in E.
Bewijs dat $DC^2 = DE \times DB$.
Geef vervolgens aan hoe een driehoek geconstrueerd kan worden als daarvan gegeven is de basis, de tophoek en de bissectrix van de tophoek.

U wordt eerst uitgedaagd een tekening te construeren die aan de gegevens voldoet, en het bewijs te leveren. (Dan pas onder de streep spieken!) Wellicht helpt het dit model te tekenen met een dynamisch computerprogramma.



figuur 1

De eerste vraag is erg eenvoudig te beantwoorden.

- $\angle ABD = \angle ACD$; omtrekshoeken op boog AD;
- $\Delta DCE \sim \Delta DBC$; beide driehoeken hebben $\angle D$ en een 'kruisjeshoek' gemeen.

Stel nu de verhoudingstabel op bij deze gelijkvormigheid:

ΔDCE:	**DE**	CE	**DC**
ΔDBC:	**DC**	BC	**DB**

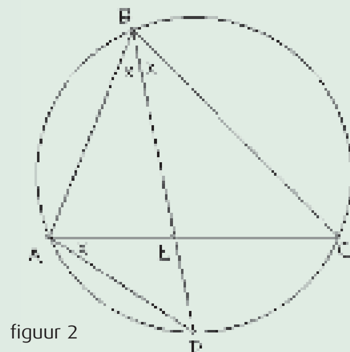
Waaruit volgt: $DC^2 = DE \times DB$.
Maar nu de gevraagde constructie, uiteraard met passer en liniaal. U kent wellicht de volgende standaardconstructies:

- middelloodlijn van een gegeven lijnstuk;
- deellijn (bissectrice) van een gegeven hoek;
- het overbrengen van een gegeven lengte of hoek (maat overbrengen).

We vertalen de tweede gestelde vraag als volgt:

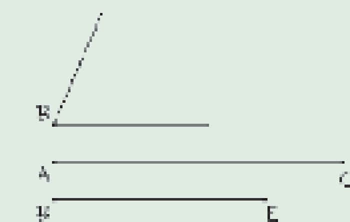
Gegeven: een hoek B, en lijnstukken AC en BE.
Te construeren: driehoek ABC met E op AC, waarbij BE deellijn is van de hoek B.

Het komt neer op het (re)construeren van het eerste plaatje. Draai de figuur tot AC horizontaal loopt (***zie figuur 2***):



figuur 2

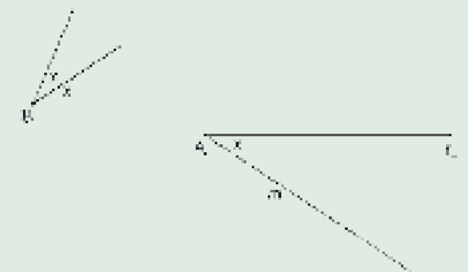
Gegeven (uit figuur 2 gekopieerd):



figuur 3

Te construeren: driehoek ABC.
Hoe nu verder? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

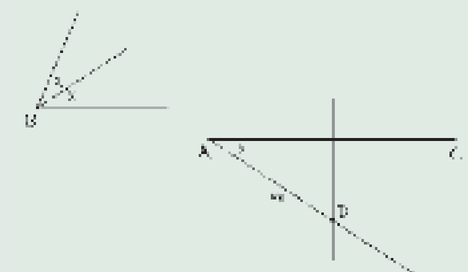
Begin met het tekenen van een kopie van het lijnstuk AC. Construeer ook de deellijn van hoek B, en breng de halve hoek B over naar A, waarmee (halve) lijn m ontstaat. Op die lijn m ligt ergens punt D; ***zie figuur 4***.



figuur 4

Waar op m ligt D nu precies? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

Uit figuur 1 volgt, omdat D op de deellijn van hoek B ligt, dat de bogen AD en CD even groot zijn; en dus ook de lijnstukken AD en CD. Dus ligt D op de middelloodlijn van AC.
We zijn nu een stap verder:



figuur 5

D is het snijpunt van *m* met de middelloodlijn van *AC*. (We kunnen nu ook de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* tekenen. Die is immers ook de omgeschreven cirkel van driehoek *ABD*. Maar deze cirkel hebben we nu niet nodig.) Hoe nu verder? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

Het wordt tijd de bewezen relatie $DC^2 = DE \times DB$ te gaan gebruiken. Stel de twee gegeven lengtes $DC = p$ en $BE = q$. Dan ligt op het verlengde van *BE* (aan de *E*-zijde) ergens punt *D*. Stel $DE = x$. We gaan het lijnstuk met lengte *x* construeren uit de gegeven lijnstukken met lengte *p* en *q*, en wel zó, dat: $p^2 = x \cdot (x + q)$

Hoe? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

Eerst een stukje algebra, met kwadraat afsplitsen:

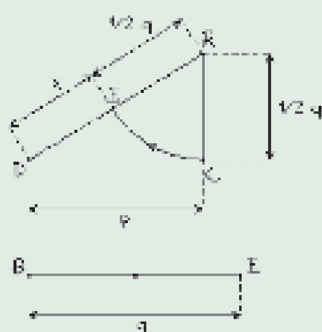
$$p^2 = x \cdot (x+q) = x^2 + xq$$
$$p^2 + (\tfrac{1}{2}q)^2 = x^2 + xq + (\tfrac{1}{2}q)^2$$
$$p^2 + (\tfrac{1}{2}q)^2 = (x + \tfrac{1}{2}q)^2$$

Hiermee kun je de lengte $x + \frac{1}{2}q$ construeren uit de lengtes *p* en $\frac{1}{2}q$. Hoe? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

Construeer de in *C* rechthoekige driehoek *DCR* (***zie figuur 6***), met $DC = p$ en $CR = \frac{1}{2}q$. Volgens de stelling van Pythagoras is dan:

$DR^2 = p^2 + (\frac{1}{2}q)^2$

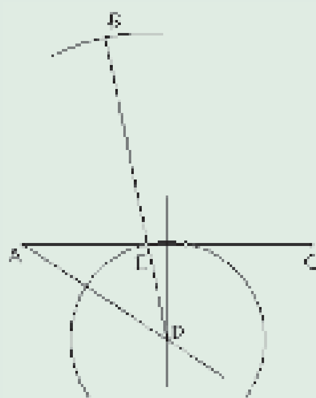
Door de lengte $RC = RE = \frac{1}{2}q$ af te passen, houd je het stukje $DE = x$ over.



figuur 6

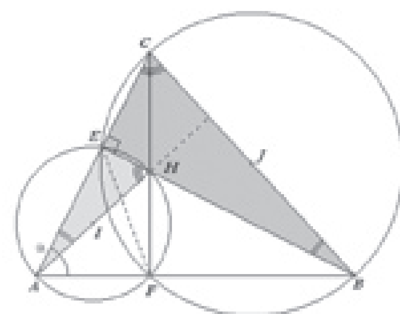
Hiermee is de lengte $DE = x$ geconstrueerd. Nu kan de tekening worden afgerond. Hoe? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

Teken een cirkel met middelpunt *D* en straal *x*. Gebruik een van de snijpunten van die cirkel met *AC* als het *echte* punt *E*.

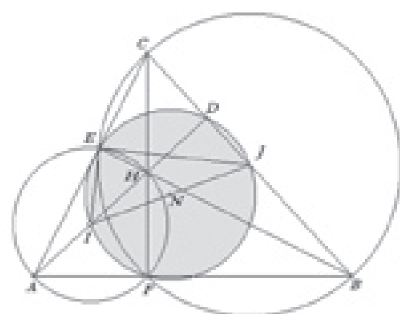


figuur 7

Nu kan de lijn door *D* en *E* getrokken worden en hierop ook de gegeven lengte *EB* worden afgepast. Daarmee zijn de hoekpunten van de gezochte driehoek *ABC* gevonden.



figuur 1



figuur 2

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958.* Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Comenius College te Hilversum.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

Nog twee naschriften bij een 'Oude doos'

In Euclides 84, nummer 8, legde Ton Lecluse in zijn rubriek 'Vanuit de oude doos' de lezers de volgende opgave uit 1931 voor.

In driehoek ABC zijn de hoogtelijnen BE en CF getrokken, die elkaar snijden in H. Bewijs, dat de cirkels, beschreven om de vierhoeken AEHF en BFEC elkaar loodrecht snijden. Bewijs tevens, dat de oppervlakken van deze cirkels samen gelijk zijn aan dat van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.

Hieronder volgen twee (door de redactie enigszins bewerkte) reacties van lezers (Louis Maassen en Aad Goddijn) op het artikel van Ton.

[Louis Maassen]

De driehoeken *EAH* en *EBC* ***in figuur 1*** zijn kennelijk gelijkvormig (*hh*).

Een draaistrekking[1] met *E* als centrum en $\frac{\pi}{2}$ als rotatiehoek (en $|EB|$ / $|EA|$ als factor; maar dat is irrelevant) beeldt het drierijtje (*E*, *A*, *H*) af op het drierijtje (*E*, *B*, *C*), en dus ook het midden *I* van *AH* op het midden *J* van *BC*.

En dan snijdt de omcirkel van *AEH*(*F*) de omcirkel van *BEC*(*F*) te *E* (en te *F*) loodrecht.

Driehoek *ABC* is (spiegel)gelijkvormig met driehoek *AEF*; de gelijkvormigheidsfactor is $|\cos\alpha|$. Dus:

$$\begin{aligned}\text{straal}(\textit{cirkel } AEF\,H) &= \text{straal}(\textit{cirkel } I)\\ &= |\cos\alpha|\cdot\text{straal}(\textit{cirkel } ABC)\\ &= |\cos\alpha|\cdot R\end{aligned}$$

terwijl $\text{straal}(\textit{cirkel } BCEF) = \text{straal}(\textit{cirkel } J)$ gelijk is aan $\frac{1}{2}BC = R\cdot\sin\alpha$.

Dus:

$$\begin{aligned}&\text{opp}(\textit{cirkel } I) + \text{opp}(\textit{cirkel } J) =\\ &\quad = \pi R^2\cdot(|\cos\alpha|^2 + (\sin\alpha)^2) = \pi R^2\\ &\quad = \text{opp}(\textit{cirkel } ABC)\end{aligned}$$

Bij het schrijven van het bovenstaande vallen mij de woorden in van Prof. Johan de Iongh, die ik in de meer dan twintig jaar waarin ik op 'zijn Instituut'[2] heb gewerkt, zeer heb leren bewonderen: 'Je begrijpt het pas echt als je **drie** bewijzen ervan hebt, en pas helemaal goed, als je hebt ingezien dat die bewijzen op hetzelfde neerkomen.'

[Redactie]

Bij deze laatste woorden sluit de redactie zich graag aan. Daarbij laat ze het aan de lezer zelf over te zoeken naar de overeenkomsten in de **vier** bewijzen: die van Lecluse en Klingens (ook in *Euclides* 84-8), dat van Maassen en het hieronder staande van Goddijn.

Overigens, de oplossing van Goddijn behoort tot de categorie 'Bekeken vanuit een hoger standpunt'; je moet wat meer meetkunde gezien (gedaan) hebben. En, zoals Freudenthal zei: 'Je hebt elementaire bewijzen en gemakkelijke.'

[Aad Goddijn]

In figuur 2 is *AD* hoogtelijn, *I* het midden van *AH* en *J* het midden van *BC*.

Zoals bekend gaat de *negenpuntscirkel*[3] van driehoek *ABC* door de middens van de zijden (dus door *J*), door de voetpunten van de hoogtelijnen op de zijden (dus door *D* en *E*) en door de middens van de 'bovenste stukken' van de hoogtelijnen (dus door *I*).

Omdat $\angle IDJ = 90°$ is, is het midden *N* van het lijnstuk *IJ* het middelpunt van de negenpuntscirkel.

En dan is ook $\angle IEJ = 90°$. Met andere woorden: de omgeschreven cirkels van de koordenvierhoeken *AFHE* (middelpunt *I*) en *BCEF* (middelpunt *J*) snijden elkaar in *E* loodrecht.

Ook is bekend dat de lengte van de straal van de negenpuntscirkel gelijk is aan $\frac{1}{2}R$, als *R* de lengte is van de straal van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*.

Dus: $IJ = R$.

En dan is ook (in driehoek *IJE*):

$EI^2 + EJ^2 = IJ^2 = R^2$

Zodat: $\pi\cdot EI^2 + \pi\cdot EJ^2 = \pi\cdot R^2$.

En dus: de som van de oppervlaktes van de omgeschreven cirkels van *AFHE* en *BCEF* is gelijk aan de oppervlakte van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*.

Ik vind het jammer dat Ton bij *zijn* oplossing niet heeft aangegeven dat er in de meetkunde nu eenmaal verbanden als bovenstaand zijn. In 1931 hoorde dat zeker wel tot 'de stof'.

Noten (red.)

[1] Ook wel *draaivermenigvuldiging*: een rotatie gevolgd door een vermenigvuldiging.

[2] Het Mathematisch Instituut van de toenmalige Katholieke Universiteit Nijmegen (nu Radboud Universiteit Nijmegen).

[3] Zie (bijvoorbeeld): *http://nl.wikipedia.org/wiki/Negenpuntscirkel*

Toelatingsexamens tot de universiteiten

[Lourens van den Brom]

[Red.] Veel van Ton Lecluse's rubrieksbijdragen 'Vanuit de oude doos' zijn geschreven naar aanleiding van toelatingsexamens tot de universiteiten uit de jaren '20. Lourens van den Brom stuurde een brief naar de redactie waarin hij toelicht op welke manier deze examens in die tijd tot stand kwamen.

Toelatingsexamens tot de universiteiten waren feitelijk de school- en staatsexamens gymnasium. Deze examens waren ingevoerd met de Hoger Onderwijs Wet van 1876; artikel 11, de schoolexamens met gecommitteerden; artikel 12, de staatsexamens.

Tot 1932 stelde elke gymnasiumdocent wiskunde voor zijn eigen school de examenopgaven vast, onder goedkeuring van de gecommitteerde voor de wiskunde. Deze gecommitteerde keurde zelden tot nooit opgaven af omdat hij in dat geval zelf aan de slag moest. Pas in 1932 werd voor het gymnasium het centraal – landelijk – schriftelijk wiskunde-examen ingesteld.[1]

Het systeem van het maken van eigen opgaven bracht met zich mee dat de leraar vraagstukken kon opgeven die hij reeds in de klas behandeld had, bewust of onbewust.

Lecluse gebruikt een boek van Stoelinga en Van Tol waarin die examenopgaven staan, maar zij geven daarbij niet de bron, de school, waar de opgaven zijn bedacht en gegeven.

De opgaven waren afgestemd op het gegeven onderwijs. Een voorbeeld, zie *Euclides* 84(2), pp. 60-61:

> Gegeven twee cirkels met middelpunten *M* en *N*. In een willekeurig punt *A* van cirkel *N* trekt men een raaklijn aan cirkel *N*, die cirkel *M* in de punten *B* en *C* snijdt. De middens van de beide bogen *CB* zijn *D* en *E*. De lijnen *AE* en *AD* snijden *MN* in de punten *P* en *Q*.
> Bewijs dat de ligging van *P* en *Q* onafhankelijk is van de keuze van *A*.

Voor mij viel daar het kwartje toen ik zag (***zie figuur 1***) dat de punten *P* en *Q* respectievelijk waren het inwendig en uitwendig gelijkvormigheidspunt van de twee cirkels (Ton Lecluse vermeldde dat niet). Voor de kandidaten in 1925 van de desbetreffende school hoefde slechts een stuiver te vallen, zij hadden die gelijkvormigheidspunten in de klas gehad.

Nu we het toch over examens hebben.

In 1863 – met de Middelbaar Onderwijs Wet – was de hbs ingevoerd en werden de eindexamens daarvan toevertrouwd aan provinciale commissies, die bestonden uit directeuren en leraren uit de desbetreffende provincie en werden benoemd door de Commissaris van de Koning. Die commissies stelden voor hun provincie het schriftelijk werk op en regelden de mondelinge examens. De organisatie en regeling was niet in alle provincies hetzelfde.

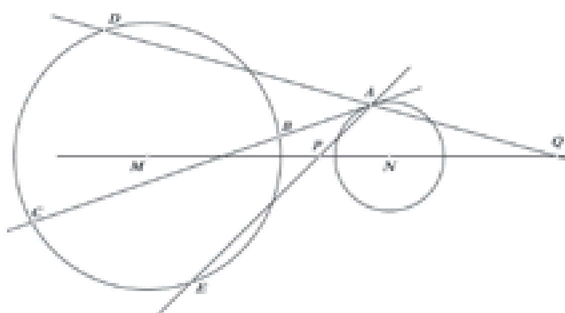
Omstreeks 1910 werd voor de hbs het landelijk centraal schriftelijk examen ingevoerd, maar de provinciale commissies bleven het mondeling afnemen. Dat systeem heeft tot 1921 gefunctioneerd.

Vanaf 1921 werden aan de hbs schoolexamens afgenomen onder begeleiding van deskundigen (gecommitteerden). Die deskundigen werden door de Minister van Onderwijs benoemd. De opgaven voor het schriftelijk gedeelte werden landelijk centraal opgesteld.

Hetgeen mij nu opvalt is dat in de loop der tijd in Nederland de examens in het voortgezet onderwijs steeds meer landelijk centraal zijn geworden. Ook de toelatingsexamens zijn daar niet aan ontkomen. Vóór WO II waren deze examens per stad, zelfs per school, verschillend; nu regeert CEVO.

Het huidige centralisme heeft het voordeel dat de inspectie eenvoudig het niveau van de verschillende scholen kan beoordelen en vergelijken. Ook hoeven niet alle leraren in de bovenbouw in het voorjaar eindexamens te bedenken.

Maar, er wordt wel een stuk verantwoordelijkheid bij het onderwijs weggenomen.



figuur 1

Noot (red.)

[1] Zie de bijdrage van Harm Jan Smid in dit nummer van *Euclides* voor een beschrijving van de situatie in de 19e eeuw.

Over de auteur

Lourens van den Brom deed in 1946 eindexamen aan de 3e 5-jarige hbs te Amsterdam.



In reactie op Hessel Pot

IS EEN BREUK HETZELFDE ALS EEN VERHOUDING?

[Ronald Meester]

In *Euclides* 84(8) vraagt Hessel Pot zichzelf (en de lezer) of een verhouding nu wel of niet hetzelfde is als een breuk. Hij vindt het merkwaardig dat in geen enkel leerboek uitgelegd wordt waar het onderscheid nu precies in zit. Met afschuw citeert hij een passage uit de TAL-reeks, waarin we kunnen lezen dat '*Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen zijn verschillende beschrijvingen van iets wat in zekere zin als hetzelfde kunnen beschouwen.*'
Ik ben het met Pot eens wanneer hij stelt dat dit citaat een beetje ongelukkig is, maar de reden dat ik het citaat niet erg geslaagd vind is toch een andere dan die van Pot. Pot stelt – als ik het goed begrijp – dat uitgelegd zou moeten worden wat dat 'iets' nu toch precies is. Ik denk dat we dat vooral *niet* moeten proberen. Ik denk dat de precisie die Pot kennelijk nastreeft – in de zin dat we de betekenis van begrippen exact moeten vastleggen – niet bij de wiskunde hoort, en de wiskunde zelfs van haar effectiviteit (en schoonheid) zou beroven.
In het vervolg van deze bijdrage zal ik uitleggen wat ik hiermee precies bedoel, en zal ik mijn opvatting ook verder motiveren. Pot's klacht raakt de kern van de wiskunde en daarom is mijn reactie wat breder dan alleen maar het onderscheid tussen breuk en verhouding, en vooral filosofisch van aard.

Is het in de wiskunde gebruikelijk dat objecten maar op één manier te interpreteren zijn? Het antwoord op deze bijna retorische vraag is natuurlijk 'nee', en ik illustreer dat met een voorbeeld dat dicht bij Pot's voorbeeld staat.
Stel ik schrijf '275/17' op. Wat bedoel ik dan precies met deze uitdrukking? Dit lijkt eenduidig, maar als je er even over nadenkt, dan zie je dat er minstens twee manieren zijn om er naar te kijken. Je kunt het zien als een *getal*, maar je kunt het ook zien als een deling, als een *proces* dus. Als je 275 deelt door 17, dan is het antwoord het getal 275/17! Door de deling alleen maar op te schrijven geef je ook automatisch het antwoord, dat is toch wel iets om even over na te denken. Een statisch object als een getal kan ook worden opgevat als een dynamisch proces, heel opmerkelijk en verwarrend voor wie er oog voor heeft.
Een ander voorbeeld is de 'x' in een vergelijking als $3x + 2 = 8$. Als we die vergelijking oplossen vinden we natuurlijk $x = 2$. Ik zou nu willen vragen, naar analogie met de vraag van Pot, of de x in $3x + 2 = 8$ naar *alle* getallen refereert, of alleen naar 2? Tja, in het begin kan x alles zijn, aan het eind alleen nog maar 2. Dat is nog eens verwarrend! Geen wonder dat kinderen moeite hebben met dit soort algebra. Gedurende het hele proces van het oplossen van een dergelijke vergelijking slaat x zowel op *alle* getallen als wel *alleen* op het specifieke getal 2.
Nog een derde voorbeeld: de *algebraïsche* uitdrukking '$y = x$', wordt *meetkundig* geïdentificeerd met een rechte lijn. De lijn *is* de vergelijking. Als je dus vraagt naar de status van de uitdrukking '$y = x$', dan kun je zeggen dat het een algebraïsche vergelijking is, maar net zo goed dat het een meetkundig object is.
De drie voorbeelden die ik zojuist gaf zijn instanties van wat de wiskundige William Byers een *ambiguïteit* noemt.[1] Een ambiguïteit treedt op wanneer een situatie of een idee binnen twee zelf-consistente, maar min of meer incompatibele kaders geplaatst kan worden. In een situatie van ambiguïteit is een creatieve stap nodig om de 'spanning' op te lossen, hetzij in de formele ontwikkeling van nieuwe wiskundige concepten, hetzij in het individuele creatieve proces. In beide gevallen wordt de ambiguïteit als het ware opgeheven door een nieuw kader te introduceren dat beide vorige kaders bevat.
Byers laat in zijn boek zien dat wiskunde vooral gaat over ambiguïteit, en veel minder over precisie en logica; de kracht (en schoonheid) van de wiskunde wordt vooral bepaald door de manier waarop ze met ambiguïteit om weet te gaan. Het beschouwen en oplossen van een ambiguïteit is de kern van het bedrijven van wiskunde. Toen de wiskundige William Thurston zich voor het eerst realiseerde dat een breuk eigenlijk hetzelfde is als een deling, beschouwde hij dat achteraf als een belangrijke stap in zijn intellectuele ontwikkeling.[2] De identificatie van meetkundige objecten met een algebraïsche vergelijking was een uiterst belangrijke stap in de ontwikkeling van de moderne wiskunde. Tenslotte werkt het oplossen van een vergelijking bij gratie van het feit dat deze een ambiguïteit is; zonder deze ambiguïteit zou de vergelijking zinloos zijn.
Het is bij een ambiguïteit meestal niet verstandig om een van de twee gezichtspunten te laten vallen. Het gaat er juist om er heen en weer tussen te gaan, en om op een 'hoger' niveau het conflict uit de wereld te helpen. Dat zoeken naar dat hogere niveau, het oplossen van de spanning, is precies waar wiskundige doorbraken mogelijk worden. De oude Grieken bijvoorbeeld wisten geen raad met de identificatie van meetkundige en algebraïsche concepten – zij verwierpen de algebra (ten gunste van de meetkunde) en misten hierdoor een enorme kans.
Laten we nu eens zien waar deze overwegingen ons brengen wanneer we terug gaan naar de relatie tussen een verhouding en een breuk. Is het eigenlijk wel verstandig om dat onderscheid per se te willen maken? Ik denk het niet; we moeten niet proberen om één-éénduidig vast te leggen waar '275/17' precies voor staat. In plaats daarvan moeten we van de ambiguïteit van '215/17' profiteren: juist het feit dat er verschillende gezichtspunten zijn, maakt het tot zo'n krachtig concept.
Ik denk dat je dus helemaal niet moet proberen om het onderscheid tussen een breuk en een verhouding te preciseren, maar dat je juist moet concluderen dat deze

verschillende manieren van praten over een concept kunnen bijdragen aan ieders intellectuele ontwikkeling. Stel je eens voor hoe geweldig het is om te ontdekken dat een verhouding tussen twee dingen (een heel intuïtief concept) beschreven kan worden met een getal, een breuk (ook een heel intuïtief object)! Het inzicht dat daar uit voortvloeit is enorm, en door de ambiguïteit af te wijzen ontzeg je de leerling de ervaring van dit inzicht. Laat die ambiguïteit dus alsjeblieft bestaan: de wiskunde beweegt zich niet door straffe definities, ze beweegt zich juist door haar vermogen om ambigue situaties toe te staan die tot een dieper inzicht leiden. Dit is niet makkelijk in de praktijk te brengen, dat geef ik onmiddellijk toe, maar dat mag geen reden zijn om het niet te doen. Wiskunde wordt beduidend leuker wanneer je op een speelse manier leert om te gaan met ambigue situaties dan wanneer ze in een 'definitie-keurslijf' wordt gepropt waarin ze zich niet kan ontwikkelen. Niemand is gediend door het maken van een exact onderscheid tussen twee situaties waarin je dan wel 'breuk', dan wel 'verhouding' zegt; er is een grens aan het belang van formele definities, zelfs, of misschien wel vooral in de wiskunde.
Wanneer we de gewraakte passage '*Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen zijn verschillende beschrijvingen van iets wat in zekere zin als hetzelfde kunnen beschouwen*' nu nog eens lezen, dan zou ik zeggen dat de formulering ongelukkig is, omdat het woordje 'iets' suggereert dat er ergens een objectief 'ding' is waarnaar de woorden verwijzen. Maar ik vermoed dat de auteurs wel in de gaten hadden dat het omschrijven van dat 'iets' niet tot verdere helderheid zou leiden. Ik denk dat ze daar gelijk in hebben, maar zou zelf geen poging hebben ondernomen om de evidentie van de uiteindelijke bewering expliciet te maken.
Tenslotte nog dit. Pot maakt zich niet alleen druk over het verschil tussen een breuk en een verhouding, maar ook over het betekenisverschil tussen een verhouding en een getal. Pot klaagt dat docenten er toch voor betaald krijgen om die begrippen duidelijk te maken aan hun leerlingen.
Dat laatste is juist, de vraag is alleen wat er duidelijk te maken is door een docent en wat niet. Bijna alle zogenaamd 'formele betekenissen' in de wiskunde zijn ingebed in menselijke intuïtie; zonder die intuïtie zijn ze zinloos. Dat geldt ook voor een elementaire begrip als een 'getal'. De grote wiskundigen Alfred North Whitehead en Bertrand Russell probeerden in het begin van de vorige eeuw het getallenstelsel te axiomatiseren op een manier die volledig gespeend zou zijn van elke menselijke intuïtie.[3] Volgens hen schreven zij slechts over abstracte zaken, en waren getallen niets anders dan een concrete instantie van hun abstractie. Maar dat was niet waar: als zij ooit uit hun axioma's een stelling hadden afgeleid die in tegenspraak zou zijn geweest met hun *natuurlijke* intuïtie voor getallen, dan zouden ze geschokt geweest zijn, en hun project zou mislukt zijn.[4]

De conclusie is dat een te ver doorschietende 'definitie-woede' niet bijdraagt aan de ontwikkeling van de wiskunde in haar geheel, en al zeker niet aan het individuele begrip ervan. Een bepaalde mate van vaagheid van begrippen blijft onontbeerlijk, hoe vreemd dat ook moge klinken voor de meest exacte van alle wetenschappen. Het is mede die 'vaagheid' die de wiskunde haar kracht geeft, en dat feit kan maar beter ook in het onderwijs erkend worden. Al te expliciet kan dat – naar haar aard – niet, maar impliciet is er voor een docent heel veel bij te dragen.

Noten

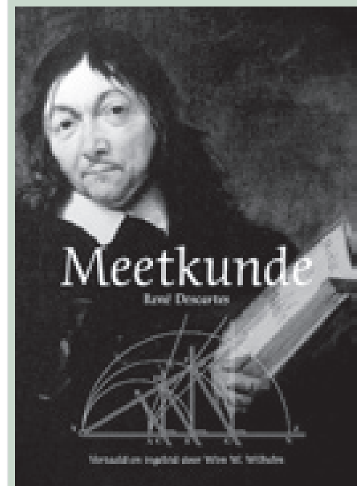
[1] William Byers (2007): *How mathematicians think*. Princeton University Press.
[2] William Thurston (1990): *Mathematical Education.* Notices of the American Mathematical Society 37; pp. 844-850.
[3] Alfred North Whitehead, Bertrand Russell (1910-1913): *Principia Mathematica,* Volumes I-III. Cambridge University Press.

[4] Door toedoen van Kurt Gödel mislukte hun project jaren later alsnog.

Over de auteur

Ronald Meester is hoogleraar Kansrekening aan de VU Amsterdam.
E-mailadres: *rmeester@few.vu.nl*

Verschenen / Meetkunde (van) René Descartes



Ondertitel: Vertaald en ingeleid door Wim W. Wilhelm
Auteur: Wim W. Wilhelm
Uitgever: Eburon, Delft (2009)
ISBN: 9789059723207
Prijs: € 27,50 (200 pagina's; paperback)

Uit een persbericht – René Descartes wordt beschouwd als de vader van de moderne filosofie. In zijn Géométrie, dat in 1637 door Jan Maire in Leiden werd gepubliceerd als aanhangsel bij zijn Discours de la Méthode waarin hij zijn wetenschappelijke methode beschreef, paste Descartes als eerste algebra toe op meetkundige vraagstukken. Na bijna 400 jaar verschijnt nu bij uitgeverij Eburon de volledige Nederlandse vertaling van dit baanbrekende werk.
Descartes' Meetkunde is voorzien van een uitgebreide inleiding door vertaler en wiskundige Wim W. Wilhelm. De vormgeving van de vertaling is zo gekozen dat de lezer een getrouw beeld krijgt van de oorspronkelijke tekst.
Er is geen diepgaande wiskundige kennis nodig om het boek te begrijpen. De lezer wordt door Descartes uitgenodigd zelf een en ander te onderzoeken.

Staartdelen

[Red.] U herinnert zich vast nog het artikel 'De staartdeling is nooit weg geweest' van Lonneke Boels. We publiceerden het begin juni in Euclides nr. 7, jrg. 84. Lonneke schreef in haar inleiding dat de staartdeling symbool geworden is voor algoritmen die niet meer aangeleerd worden en voor de daaruit voortvloeiende problemen. Ze beoogde in haar artikel te laten zien dat de notatie van de staartdeling in de loop der jaren weliswaar anders geworden is, maar dat het algoritme dat wordt aangeleerd, nog steeds hetzelfde is.
David van Oorschot reageert als eerste op dit artikel met een voorzet voor een andere notatie van een staartdeling.

41 jaar geleden

Dag Lonneke,
Ik wil graag reageren op een gedeelte van het artikel van jouw hand 'De staartdeling is nooit weg geweest'.
Je signaleert daarin twee problemen, die zich 'steevast' voordoen bij het oplossen van een staartdeling op de traditionele manier.
Ik ben het daar niet mee eens. De problemen komen evenwel voor, maar zijn het gevolg van het niet goed noteren van de staartdeling.
Je moet een staartdeling niet zo noteren:

```
58 / 6237 \
```

maar zo:

```
      ....
58 | 6237
```

Mijn leerlingen moesten boven het deeltal 6237 stippen zetten en de afspraak was: boven het duizendtal schrijf je op 'hoeveel keer het gaat bij de duizendtallen', daarna doe je dat ook bij de honderdtallen enz.
Als je dan vergeet op te schrijven, dat het bij de verdeling van tientallen 0 keer gaat, krijg je als eindresultaat:

```
       17.
58 | 6237
     58
      437
      406
       31
```

De leerling kan constateren, dat de deling 'klaar' is, maar dat de notatie van het antwoord (quotiënt) niet klopt, niet volledig is.
Als leerlingen als oplossing de onderstaande uitgebreide uitwerking noteerden, dan had ik daar geen probleem mee. Ik leerde ze wel, dat bij het noteren van het antwoord de 0 aan het begin van het antwoord weggelaten moest worden.

```
     0107
58 | 6237
     0
     62
     58
      43
       0
      437
      406
       31
```

Ook het door jou gesignaleerde probleem van het vergeten de komma op te schrijven bij het doordelen, wordt met bovenstaande notatie voorkomen.
Als leerlingen doordeelden, moesten ze vooraf noteren:

```
     ....,....
58 | 6237,0000
```

Als je nu in het deeltal de komma passeert, passeer je ook de komma in het antwoord. Je vergeet dan niet de komma, sterker de komma staat ook op goede plaats. En geen geknoei bij het onbeperkt toevoegen van nullen achter de komma.

```
       107,534
58 | 6237,000
     58
      437
      406
        310
        290
         200
         174
          260
          232
           28
```

Verder zijn alle fouten bij een (staart) deling af te vangen door te leren, dat er een controle is voor het staartdelen: vermenigvuldigen.

Ik schrijf in dit artikel vaak in de verleden tijd. Ik leerde mijn leerlingen deze staartdeling namelijk **41** jaar geleden al op deze manier aan in de vierde klas van de lagere school (nu groep 6).
Groeten, David

[Red.] De staartdeling inspireerde ook Joost Hulshof tot een reactie.

'Learn to use' en 'use to learn'

Vanaf welke leeftijd zou je kinderen kunnen boeien met een verhaal over:

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\ldots$$

Met een hapjesmethode is het niet heel moeilijk om dit na te gaan. Verdeel 1 in 10 stukken, deel 9 stukken uit, verdeel het 10-de stuk weer in 10 stukken, enzovoorts. De 1 is onmiskenbaar als het verschil van 10 en 9. '10 eraf 9' zou je bijna zeggen. Ofwel 10 = 9 + 1. Drie getallen, elk met hun eigen rol in de formule.
In de noemers zien we de machten van 10: 10 tot de macht 1 is 10, 10 tot de macht 2 is 10-kwadraat is 100, 10 tot de derde macht is 1000, …. 10 is het aantal vingers waarmee we hebben leren tellen en uiteindelijk het decimale getalstelsel hebben ingevoerd, waarbij de cijfers lopen van 0 tot 9. De cijfers achter de komma tellen de tienden, de honderdsten, de duizendsten, enzovoorts. Dus we kunnen ook schrijven:

$$\frac{1}{9}=0{,}11111\ldots$$

een voorbeeld van een breuk met een repetente decimale ontwikkeling.
Met 1/99 gaat het net zo. Je deelt eerst 1 in 100 stukjes, deelt er 99 uit, en deelt het honderdste stukje weer in 100 stukken, enzovoort. Je ziet dat:

$$\frac{1}{99}=0{,}01010101\ldots=$$
$$=\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{1000000}+\frac{1}{100000000}+\ldots$$

De hapjesmethode werkt! Want het hapje is steeds hetzelfde. Je kunt er zelfs een stelling mee bewijzen: Voor elke gehele n groter dan 1 geldt:

$$\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots$$

Niet alleen met $n = 10$, maar ook met $n = 8$ in het Land van Acht en zelfs met $n = 1000$ op Douglas Adams' planeet met duizendpoten, waar de deodorant eerder is uitgevonden dan het wiel.
Zonder hulpmiddelen blijkt zo dat:

$$0{,}042042042\ldots=\frac{42}{999}$$

en ook dat elke repentente decimale ontwikkeling in feite een breuk is.
Omgekeerd is de decimale ontwikkeling van bijvoorbeeld 1/83 gelijk aan:
0,012048192771084337349397590361445 7831325 30120481927710843373493975 90361445783132 53

en daarna herhaalt het zich. Ook dat kun je zelf uitrekenen, niet met een hapjesmethode, maar met een *staartdeling*. De periode heeft 82 cijfers. Het duurt dus wel even, maar het kan. De staartdeling is een mechaniekje dat werkt, efficiënt, elegant en transparant. Je kunt hem leren gebruiken zonder hem meteen te hoeven begrijpen en al gebruikend leren hem te begrijpen, niet meteen met 1/83 natuurlijk, eerst maar eens met 1/7 of zo.
Learn to use en *use to learn*.

Verschenen / Wiskunde voor de sectoren



In september en oktober is de nieuwe serie 'Wiskunde voor de sectoren' van SchoolTV uitgezonden. De serie toonde de rol van wiskunde in verschillende sectoren van het vmbo (techniek, landbouw, zorg en economie).
U kunt de gemiste afleveringen terugkijken op « *www.uitzendinggemist.nl* » of de serie bestellen op DVD voor € 32,50.
De serie is bestemd voor klas 2 en 3 van het vmbo.
Voor uitgebreide informatie over de serie en beschrijvingen van de afleveringen kunt u kijken op « *http://schooltv.nl/wiskundevoordesectoren_docent* ».
U kunt ook via deze website (in de webwinkel) een handleiding aanschaffen voor € 14,00.

Het Geheugen



[Harm Jan Smid]

Problemen en discussies die nu het wiskundeonderwijs beheersen, hebben soms parallellen in een ver of niet zo ver verleden. Soms lijkt het of er niets veranderd is, maar vaak is het toch net even anders. In de rubriek 'Het Geheugen' pikt Harm Jan Smid zo'n actueel onderwerp op en speurt naar historisch vergelijkingsmateriaal. Soms leerzaam, bijna altijd relativerend.

Examens en gestrengheid

Deze kop stond afgelopen juni in de *NRC*. Hij geeft treffend het huidige klimaat rond het onderwijs weer. Het moet allemaal wat (ge)strenger, wat volgens het artikel zoiets betekent als met meer structuur en kennisoverdracht. Examens zouden dan hét middel zijn om dat af te dwingen. Een mooie aanleiding om in deze rubriek ons examengeheugen eens wat op te frissen.

De eerste examens?

Onze eindexamens stammen af van die van de HBS. In de wet op het middelbaar onderwijs van 1863 komen enkele bepalingen voor over een eindexamen. Die bepalingen waren bewust heel summier gehouden, want Thorbecke, de opsteller van de wet, wilde zo min mogelijk vastleggen. Iedereen die dat wilde, kon deelnemen aan die examens; daarvoor hoefde je geen leerling van een school te zijn. De HBS-examens werden tot 1920 per provincie georganiseerd en afgenomen door een externe commissie, benoemd door de commissaris van de koning(in). Pas daarna werd het een schoolexamen.
De eerste eindexamens vonden plaats in 1866. Er waren toch al 38 deelnemers, van wie 15 extraneï. Er slaagden 23 deelnemers, dus al te zachtzinnig was men niet. Voor de liefhebbers van vaardigheden onder ons staat ***in figuur 1*** het examen stelkunde uit de provincie Zeeland van 1867. Dat waren nog eens tijden! Bij de meetkunde werden vrijwel geen bewijzen gevraagd; het draaide bijna allemaal om berekeningen en een paar constructies. Een voorbeeld, uit het examen van 1867 van Noord-Holland: 'Construeer een vierkant als de som van de zijden en een diagonaal gegeven is.' Niet zo moeilijk, toch wel aardig.

Naar een heuse examencultuur

Hoewel Thorbecke dat absoluut niet had gewild, nam de examencultuur op de HBS al snel een grote vlucht. Aan het diploma werden rechten verbonden en er kwamen meer gedetailleerde voorschriften. Examens hoorden voortaan voorgoed bij het onderwijs. Bij een examencultuur hoort ook een discussie- en klachtencultuur, en ook die barstte al snel los. Inspecteur Van Eyk schreef al in 1890 over het eindexamen: 'Er bestaat althans geen onderwerp, hetwelk gedurende de 25 jaren, die de invoering van dat onderwijs achter zich heeft, zóóveel stof opleverde tot allerlei aanmerkingen, bedenkingen, klachten zelfs, als dit. Indien men alles bijeen bracht, wat daarover gesproken is, en geschreven, zou men een kleine brochuren-bibliotheek rijker zijn.'
Sommige klachten, zoals over de niveauverschillen tussen de provinciale examens, hebben al lang alle actualiteit verloren, maar de opinie van inspecteur Ten Bruggencate (inderdaad, die van de Engelse woordenboeken) zou zó in de huidige discussies over de aansluitingsproblematiek gebruikt kunnen worden! ***Zie figuur 2***.

Een écht landelijk examen

Toch had de HBS niet de primeur van de eerste door het Rijk georganiseerde eindexamens. Die hadden de Latijnse scholen. Daar bestond van oudsher een schoolexamen, de promotie, dat toegang gaf tot de universiteit. In de 19de eeuw gingen de universiteiten ook zelf toelatingsexamens organiseren, bijvoorbeeld voor diegenen die niet de opleiding op een officieel erkende Latijnse school hadden gevolgd. Maar ook leerlingen uit de voorlaatste klassen van de Latijnse scholen gingen steeds vaker een poging wagen om door middel van dat toelatingsexamen het laatste schooljaar over te slaan, en ook steeds vaker met succes. Voor de universiteiten (en trouwens ook de voor de individuele hoogleraren) betekenden meer studenten meer geld, en ook toen deed de marktwerking de rest: de toelating werd steeds makkelijker. De 'officiële' Latijnse scholen kregen steeds meer concurrentie van particuliere opleidingen en zagen bovendien hun eindexamenklassen leeglopen. Die scholen gingen dus aandringen op een, door de overheid af te nemen, onafhankelijk examen voor die leerlingen die geen diploma van een erkende Latijnse school hadden.
Dat hebben ze geweten! In 1845 werd inderdaad zo'n examen ingesteld, maar dan voor iedereen. De Latijnse scholen verloren hun promotierecht en iedereen moest een door de staat georganiseerd toelatingsexamen doen – want ook de universiteiten verloren het recht op een eigen toelatingsexamen. Vermoedelijk heeft dat heel wat paniek veroorzaakt. Iets daarvan vinden we terug in een brief die J.H. van Sillevoldt, leraar wiskunde aan het Haags Gymnasium, aan zijn curatorium zond; ***zie figuur 3***; het besluit van 23 mei 1845 gaat over de instelling van het staatsexamen).
Uitgerekend nu dat examen eraan kwam, zat hij met heel zwakke klassen. U herkent vast wel iets van zijn zorgen…
Voor het wiskundeonderwijs was het staatsexamen echter een *blessing in disguise*. De positie van ons vak was de in de jaren daarvoor op de Latijnse scholen wel duidelijk verbeterd, maar de klassieke talen bleven sterk domineren. Het was eigenlijk ondenkbaar om een leerling die goed was in klassieke talen, maar wiskunde verwaarloosde, het diploma te onthouden. Nu lag dat echter opeens heel anders. De landelijke examencommissie telde zeven

1867. Zeeland.

1. Herleid:

$$\sqrt{2^{\frac{1}{2}}x^{-1}\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}x^{-1}y^{-1}\sqrt{2^{\frac{1}{3}}y^{-1}\sqrt[3]{\frac{1}{x^{-1}y^{-1}}}}}}.$$

Antw. $\dfrac{\sqrt[12]{5.7^{6}}}{\sqrt[18]{2^{3}.3^{18}x^{20}y^{11}}}$.

2. Herleid:

$$\sqrt{11-5\sqrt{-3}}\pm\sqrt{11+5\sqrt{-3}}.$$

Antw. $5\sqrt{2}$; $-\sqrt{-6}$.

3. Op te lossen de vergelijking:

$$\sqrt{12+x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{33-2x}.$$

Antw. $x=4$.

figuur 1 Examen stelkunde

Totnutoe werd er veel te veel gelonkt naar de Polytechnische School (thans Technische Hoogeschool), en ook naar de Militaire Academie. Dat moet uit zijn. Evenmin als men van het L. O. mag verwachten, dat het zich richten zal naar de toelating tot de hoogere burgerschool, evenmin mag het universitair onderwijs aparte eischen stellen. Zal de hoogere burgerschool inderdaad zegenrijk werken voor de geheele maatschappij, dan moeten de wijze woorden van Thorbecke niet alléén nagespròken, maar ook nagevòlgd worden, dit laatste meer dan totnutoe het geval was. De paedagoog — en niet de geleerde — moet uitmaken, wat men van 17-jarigen mag verwachten.

figuur 2 Opvatting van inspecteur K. ten Bruggencate

Edel Achtbare Heeren!

figuur 3 Uit een brief van J.H. van Sillevoldt (1845)[1]

leden, onder wie twee wiskundigen. En volgens het examenreglement waren twee tegenstemmers al voldoende om een kandidaat te laten zakken, en een enkele maal gebeurde dat ook. Dat gaf wiskunde een ongekende machtspositie: geen school of leerling kon het zich nog permitteren wiskunde niet serieus te nemen.

Wat er precies gevraagd werd op die examens, is niet meer te achterhalen. Wel publiceerde iedere commissie een verslag, waarin ook de resultaten op het onderdeel wiskunde besproken werden. Een veel voorkomende klacht was dat leerlingen ijverig, maar zonder veel begrip allerlei moeilijke dingen leerden, maar intussen de basisbeginselen en vaardigheden niet beheersten. Zo hadden sommigen zich wel bezig gehouden met logaritmen en reeksen, maar konden ze niet met breuken rekenen. Waar hebben we dat meer gehoord! Om te laten zien dat er vroeger niet alleen maar gemopperd werd, een positief stukje uit het verslag van 1849, toen die zelfde Van Sillevoldt in de examencommissie zat; ***zie figuur 4*** (op pag 82).

Na 1850 verdween het staatsexamen weer. Thorbecke was inmiddels aan de macht gekomen, en als volbloed liberaal vond hij dat de staat zich met dit soort zaken niet moest bemoeien. In de woorden van een tijdgenoot: 'Aanleiding tot die veranderingen [d.w.z. de afschaffing van het staatsexamen; HJS] is vooreerst de geest van vrijzinnigheid onzer dagen, die niet gedoogt, dat iemand verhinderd worde Hoger onderwijs bij te wonen.' Zo hadden examens en politiek ook toen al van alles met elkaar te maken.

Examens en selectie

Natuurlijk bestonden er vóór de 19de eeuw ook examens, maar de examencultuur zoals wij die kennen, stamt uit die tijd. Dat is geen toeval. Afkomst werd minder belangrijk en onderwijs en examens gingen steeds meer bepalen in welke functies en beroepen je terecht kon komen. Als onderwijsmensen vinden we de inhoud,

het examenprogramma het belangrijkst. Vanuit de maatschappij gezien is het echter minstens zo belangrijk dát er geselecteerd wordt en doet de precieze inhoud er niet zoveel toe. De laatste decennia was de 'optimale zelfontplooiing' van de leerling erg belangrijk en daarbij paste geen al te strenge selectie. Dat klimaat is duidelijk aan het veranderen. 'De politiek', die dat klimaat weerspiegelt, stelt weer meer eisen en wordt strenger, bijvoorbeeld door het invoeren van een centraal examen rekenen/wiskunde op het mbo.
Begrip en Inzicht zijn mooi, maar nu geldt weer: Kennis is Macht!

I. *Wiskunde.*

Wanneer de Commissie den uitslag van het examen in de mathematische vakken vergelijkt met hetgeen in de verslagen van de voorgaande jaren in dit opzigt als slotsom staat aangeteekend, dan strekt het der Commissie tot genoegen te kunnen verklaren, dat zij onmiskenbare blijken van vooruitgang in de rigtige beoefening van de wiskunde heeft bespeurd.

Immers een betrekkelijk groot getal der geëxamineerden toonde heldere begrippen te hebben verkregen van de voornaamste deelen der wiskunde, voor zooverre die als vereischten voor aanstaande studenten moeten worden aangemerkt, terwijl enkelen hunne mathematische studiën met vrucht zelfs veel verder hadden uitgebreid. Zoowel in het geven van bepalingen, als in het betoogen van de uit deze bepalingen voortvloeijende eigenschappen van getallen en uitgebreidheden, gaven zij blijken, dat door deze studie hun verstand ontwikkeld, hun oordeel gescherpt was, en dat zij gevoel voor logische redenering hadden verkregen.

Meestal ook waren de gevolgen van de langs dezen weg verkregen verstands-ontwikkeling zigtbaar in de vorderingen, die de jonge lieden hadden gemaakt in die deelen der taalstudie, welke van het verstand de meeste geoefendheid eischen. Goede vorderingen in de wiskunde hielden in den regel gelijken tred met grondige oefening in de grammatica der Latijnsche en vooral der Grieksche taal.

Slechts eene enkele maal heeft zich het geval voorgedaan, dat een examinandus, wiens vorderingen in de wiskundige vakken goed konden genoemd worden, wegens te weinige bedrevenheid in de Latijnsche en Grieksche talen niet tot de academische lessen heeft kunnen toegelaten worden. En omgekeerd, bij een enkelen slechts is het noodzakelijk geweest, te geringe oefening in de mathematische vakken als de hoofdoorzaak van zijne afwijzing op te geven.

figuur 4 Eveneens geschreven door Van Sillevoldt (1849)

Noot (Red.)
[1] Transcriptie: Edel Achtbare Heeren! / Indien het besluit van 23 Mei 1845, omtrent de bevordering van jonge lieden tot de Academische lessen, het mij reeds tot pligt maakt UEAb. naauwkeurig met den Staat der Mathematische Studies aan het 's Gravenhaagsch Gymnasium bekend te doen zijn, de algemeene zwakheid in het vak reken- stel en meetkunde van de beide hoogste Klassen dringen mij, tegen de tot heden gevolgde gewoonte, UEAb. heden schriftelijk een algemeen overzicht te geven van den staat der vorderingen in de wiskunde van die klassen der eerste afdeling, welke gedurende het afgeloopene jaar bij mij dit onderwijs ontvingen. / Het aan UEAb. wijzer en beter oordeel al of niet, en in het eerste geval, welke maatregelen te nemen, om in dezen min gunstigen stand der zaken, zoo mogelijk, ten aanzien van de vijfde klasse, verbetering te brengen, en voor het vervolg dezen gelijken ongunstigen toestand te voorkomen, ga ik terstond ter zake.

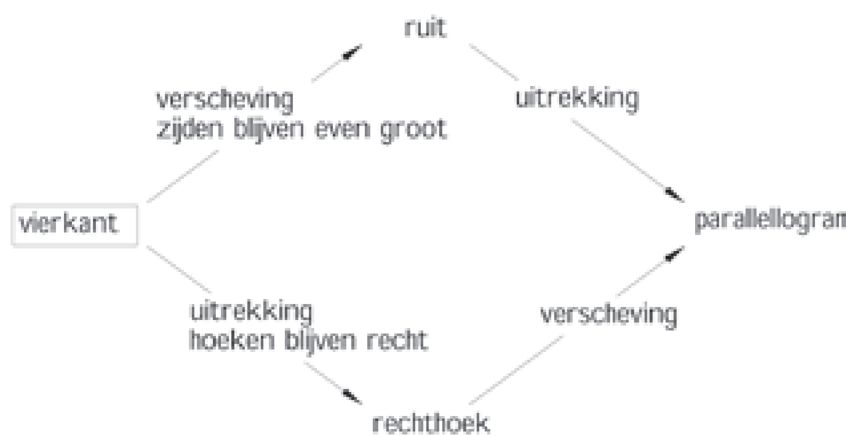
Over de auteur
Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is momenteel voorzitter van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO).
E-mailadres: *h.j.smid@ipact.nl*

Een ander vierhoekenschema

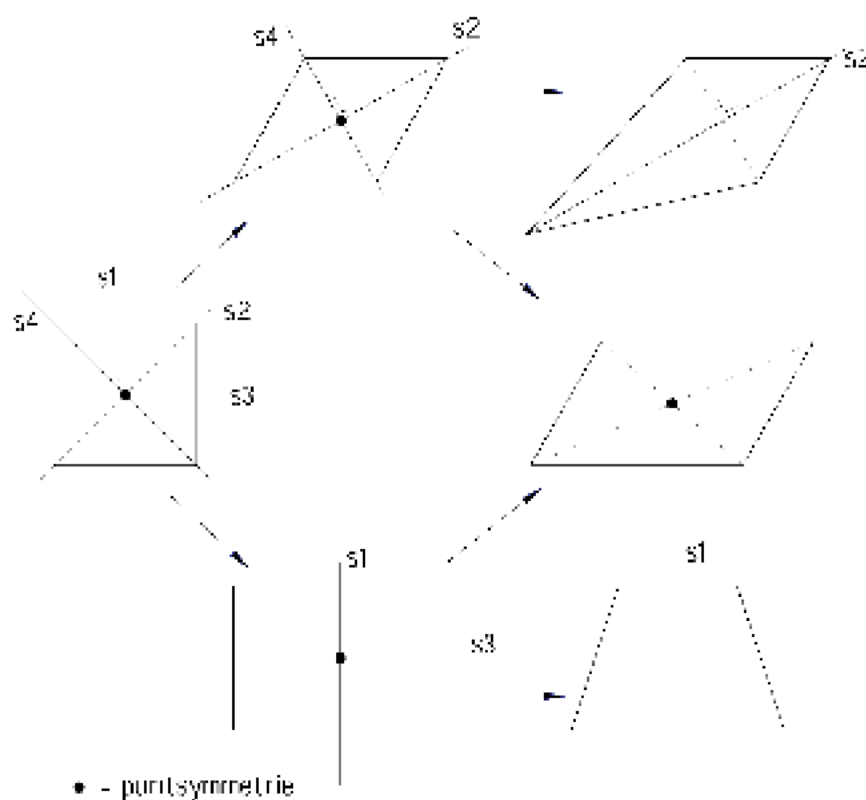
[Gerard Wiarda]

In het aprilnummer van *Euclides* (84-6, pag. 211) staat een vierhoekenschema van Jan Willem Schutter, waarin een willekeurige vierhoek in drie stappen overgaat in een vierkant. De bijbehorende punt- en lijnsymmetrieën zijn erbij gezet. Uitgaande van die symmetrieën zou ook het 'gelijkbenige trapezium' vermeld kunnen worden. Daarom volg ik in mijn lessen de omgekeerde weg met het vierkant als uitgangspunt; ***zie figuur 1***.

Bij 'verscheving' verdwijnen de symmetrieassen door de middens van de zijden, bij uitrekking die door de hoekpunten. Combinatie van beide transformaties leidt tot het parallellogram waarin alleen nog de puntsymmetrie resteert; ***zie figuur 2***.



figuur 1



figuur 2

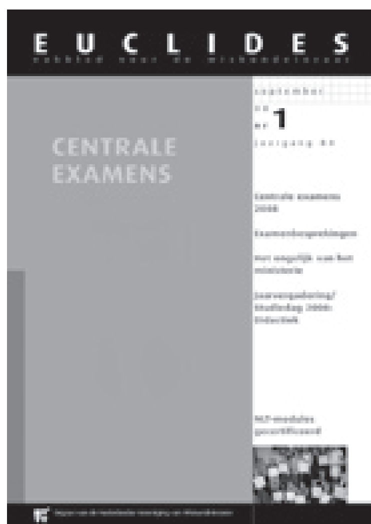
Noot (red.)
Op de webpagina 'Over vierhoeken', op website van Dick Klingens, staat een op Cabri Geometry gebaseerde Java-applet (direct bereikbaar via *www.pandd.demon.nl/vierh/overvierh_m.htm*) waarin enkele van de bedoelde aspecten worden gevisualiseerd. Die applet is alleen bruikbaar indien de gebruikte browser Java-applicaties toestaat.

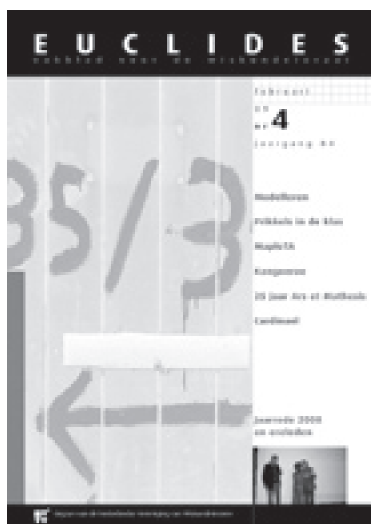
Over de auteur
Gerard Wiarda is docent wiskunde aan het Wessel Gansfortcollege te Groningen.

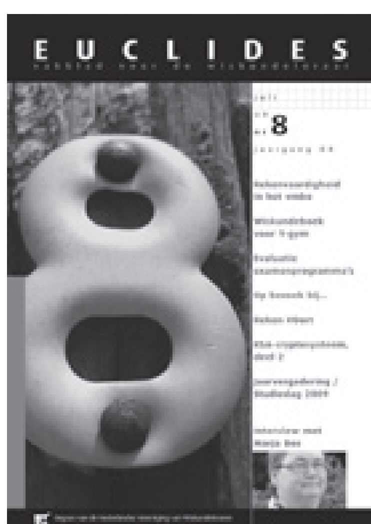
Jaarverslag Euclides

JAARGANG 84 (2008/2009)

[Klaske Blom]







In dit jaarverslag wordt een overzicht gegeven van de werkzaamheden van de redactie in de periode van 1 augustus 2008 tot en met 31 juli 2009.

Redactie

De redactie van *Euclides* bestond het grootste deel van het afgelopen jaar uit negen personen, ieder met een eigen aandachtsgebied en/of eigen taak op het gebied van het becommentariëren en genereren van artikelen: Bram van Asch (boekbesprekingen), Marjanne de Nijs (didactiek), Rob Bosch (wiskundige artikelen), Hans Daale (hbo), Wim Laaper (havo/vwo), Joke Verbeek (vmbo), Gert de Kleuver (redactievoorzitter), Dick Klingens (eindredactie) en Klaske Blom (hoofdredactie).
Klaske Blom volgde op 1 augustus 2008 Marja Bos op als hoofdredacteur en Marjanne de Nijs begon op 1 september 2008 als redacteur didactiek. In april 2009 hebben we afscheid genomen van Gert de Kleuver als voorzitter; per 1 juli 2009 is hij opgevolgd door Heiner Wind.
De redactie kwam driemaal plenair ter vergadering bijeen. De kernredactie (die bestaat uit de voorzitter, eindredacteur en hoofdredacteur) kwam buiten die plenaire bijeenkomsten ook nog enkele malen bij elkaar. Verder vond incidenteel overleg plaats met het bestuur van de NVvW.

Inhoud

Euclides is gewijd aan het Nederlandse wiskundeonderwijs. De artikelen hebben een vakinhoudelijke, informerende, didactische, opiniërende en/of actueel-journalistieke inhoud. De redactie streeft naar een breed aanbod in artikelen zodat alle lezersdoelgroepen zich herkennen in het blad. Bijdragen worden voor een deel spontaan ingezonden en voor een ander deel op uitnodiging geschreven.
De kopijlijst telde gedurende de hier beschreven periode 159 inzendingen: concept-artikelen, boek-, software- en filmbesprekingen, interviews, verslagen van prijsuitreikingen en conferenties, redactionele kopij, aankondigingen en mededelingen, en daarnaast NVvW-bestuursbijdragen voor de Verenigingspagina's.
Buiten deze 159 inzendingen ontving de redactie een groot aantal persberichten.

Euclides kende ook in het afgelopen jaar een aantal vaste rubrieken.
Van Frits Göbel was in elk nummer de rubriek *Recreatie* te vinden, met wiskundige puzzels, oplossingen en 'de ladderstand'.
Harm Jan Smid verzorgde vier afleveringen van zijn rubriek *Het Geheugen* en liet ons daarin parallellen zien tussen discussies in het wiskundeonderwijs van vroeger en nu.
Elk nummer bevatte een aflevering *Vanuit de oude doos*, verzorgd door Ton Lecluse die op zoek ging naar oude meetkunde-examenopgaven. In de rubriek *Verschenen* werd regelmatig melding gemaakt van nieuwe publicaties. Elk nummer werd voorzien van een hoofdredactionele inleiding door Klaske Blom, *Kort Vooraf*, waarin ook actuele kwesties kort de aandacht kregen.

Vanuit het streven meer docenten aan het woord te laten over hun vak en hun onderwijsidealen heeft de redactie interviews gehouden met vakgroepen op verschillende scholen. Klaske Blom bezocht *Focus* in Harderwijk en het *Ichthus College* in Veenendaal. Marjanne de Nijs ging naar het *AOC Oost* in Twello en interviewde daar de vakgroep.
Wiskunde-om-op-te-studeren kwam onder andere aan de orde in de artikelen van Kees Jonkers (*De exacte waarde van* $\cos\frac{\pi}{17}$), van Dick Klingens (*De constructie van de regelmatige* 17*-hoek*) en in de artikelen van Benne de Weger (*Zwakke sleutels bij het RSA-cryptosysteem*).
Op de pagina's bestemd voor het Verenigingsnieuws troffen we niet alleen de verslagen van Kees Lagerwaard over de bestuursvergaderingen, maar ook schreven bestuursleden over hun takenpakket binnen het bestuur. Marianne Lambriex wijdde twee artikelen aan het beroepsregister voor wiskundeleraren; Metha Kamminga, Henk



Bijleveld en Douwe van der Kooi gaven een mooi kijkje in de bestuurskeuken.
In het afgelopen jaar hebben we een aantal maal opiniërende artikelen kunnen publiceren, aansluitend op een actualiteit. Ook dit is een manier om lezers te informeren over de (politieke) ontwikkelingen rond het wiskundeonderwijs. In dit kader noem ik de artikelen van Sieb Kemme (*Waarom het ministerie van OCW ongelijk heeft*), van Marian Kollenveld (*Kunt u het nog volgen?*), van Jan van de Craats (*Twee bewogen jaren*) en van Henk Pfaltzgraff (*Minder volume en meer inhoud*).
Zonder alle andere mooie, rijke, inspirerende artikelen tekort te willen doen, noem ik tenslotte die artikelen die informeerden over de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs, geschreven door deskundig auteurs die nauw bij deze ontwikkelingen betrokken zijn: Paul Drijvers schreef over de nieuwe examenprogramma's in *Op weg naar 2014*, Gert de Kleuver over de ontwikkeling van de nieuwe rekenprogramma's in *RekenVOort*, Paul van der Molen over de *Compex-examens* en Hielke Peereboom over een hot item, *De algebraische vaardigheden in de Tweede fase.*
Uiteraard werd aandacht besteed aan diverse evenementen, symposia en prijsuitreikingen op het gebied van de wiskunde en het wiskundeonderwijs. Het septembernummer was voor het grootste gedeelte gewijd aan de in 2008 afgenomen wiskunde-eindexamens in het voortgezet onderwijs, van vmbo-KB tot en met vwo-B12.

Omvang

Euclides heeft in principe een vaste omvang van 40 pagina's per nummer. De nummers 1 (het examennummer) en 4 telden in het afgelopen jaar 44 pagina's; de nummers 3, 6 en 7 hadden elk 36 pagina's en de overige nummers 40 pagina's. De steunkleur was blauw. De productie van *Euclides* was ook dit jaar in handen van 'De Kleuver Bedrijfscommunicatie b.v.' in Veenendaal.

Publicatieprocedure

Ingezonden bijdragen worden in eerste instantie beoordeeld (dat wil zeggen geaccepteerd of afgewezen) door de hoofdredacteur. In geval van acceptatie wordt de inzending van commentaar voorzien door de hoofdredacteur en enkele andere redactieleden. De auteur krijgt vervolgens de gelegenheid zijn/haar artikel op basis van dit commentaar bij te stellen.
Voor becommentariëring wordt incidenteel ook een beroep gedaan op personen buiten de redactie. De namen van deze referenten worden vermeld op de eerste pagina van het nummer met de bijdrage die zij becommentarieerden.
Nadere informatie over de publicatieprocedure en een aantal richtlijnen voor de aanlevering van bijdragen voor *Euclides* staan vermeld op *www.nvvw.nl/euclricht.html.*

Euclides als Verenigingsorgaan

Euclides is 'vakblad voor de wiskundeleraar', maar tegelijkertijd 'orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren'. Als Verenigingsorgaan kent het tijdschrift daarom een aantal geoormerkte pagina's ten behoeve van het *Verenigingsnieuws*. Het bestuur van de NVvW kan deze Verenigingspagina's, zonder inhoudelijke bemoeienis en buiten verantwoordelijkheid van de redactie, vrijelijk gebruiken om zich tot de leden te richten. Dit gebeurde onder meer in de vorm van *Bestuurstafels*, waarin het bestuur van de NVvW de leden informeert over lopende kwesties en besluiten. Daarnaast hebben diverse bestuursleden het afgelopen jaar uitvoerig verslag gedaan van hun werkzaamheden voor de Vereniging op de pagina's *Verenigingsnieuws*.

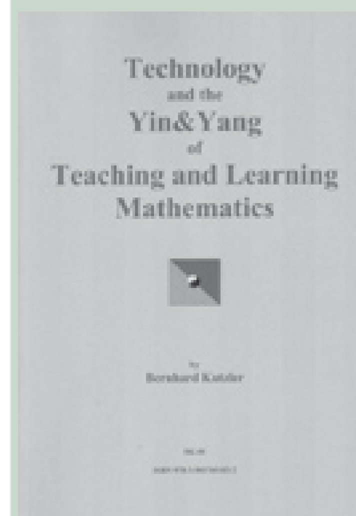
Voor en door wiskundedocenten

Wiskundedocenten en andere betrokkenen bij het Nederlandse wiskundeonderwijs vormen een brede en tamelijk heterogene doelgroep, ondanks hun gemeenschappelijke affiniteit. Uiteraard streeft de redactie van *Euclides* ernaar een ieder uit deze groep een ruime sortering aansprekende, informatieve en lezenswaardige artikelen aan te bieden. Feedback van u als lezer is daarom voor de redactie van groot belang, en ook uw inhoudelijke inbreng (in de vorm van een artikel voor collega's in het land) wordt met veel belangstelling door de redactie tegemoet gezien.
Stuur daarom uw opmerkingen en bijdragen naar *redactie-euclides@nvvw.nl*.

Over de auteur

Klaske Blom is hoofdredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *klaskeblom@gmail.com* of *redactie-euclides@nvvw.nl*

Verschenen / Technology and the Yin & Yang of Teaching and Learning Mathematics



Auteur: Dr. Bernhard Kutzler
Uitgever: Rhombus, Answerpen (B)
ISBN 978-3-901769-83-2
Prijs: € 8,40 (51 pagina's)

Bernhard Kutzler geeft in zijn nieuwe boek een synthese van de visie die hij de afgelopen 20 jaar heeft ontwikkeld over het zinvol gebruik van ICT in de lessen wiskunde.
Inhoudsopgave:

1. Introduction
2. Mathematics/Pedagogy/Technology-Space
3. Represent
4. Document
5. Communicate
6. Compensate
7. Solve
8. Explore
9. More Thoughts about Teaching and Technology
10. Casanova or Don Juan?

Inhoud van de 84e jaargang (2008/2009)

Bijdragen

Recreatie

Boekbesprekingen e.d.

Verschenen

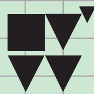
Aankondigingen, mededelingen, oproepen e.d.

Van de redactie

Errata

Servicepagina

Verenigingsnieuws



Van de bestuurstafel

[Marian Kollenveld]

Al langere tijd heb ik de behoefte om eens op een rijtje te zetten wat de vereniging zoal doet, en omdat we dit jaar als actieplan alle bestuursleden een bladzijde gegeven hebben om te vertellen over hun activiteiten, grijp ik deze kans voor een wat algemener, min of meer volledig overzicht van bestuurs-activiteiten. Dat ziet u ook meteen dat ik zeker niet alles alleen doe: alle bestuursleden blazen hun partijtje stevig mee.
Wat een voorzitter doet is vrij ongewis: je bent boegbeeld, initiator, richtingaanwijzer, manusje van alles en vliegende keep ineen, en dat maakt het juist zo aardig. We zijn een vrijwilligersorganisatie en dat moet wat mij betreft vooral zo blijven. Uiteraard met wel wat professionalisering in de vorm van detachering van degenen die vitale activiteiten verrichten, zoals de hoofd-redacteur van *Euclides*, en ook de voorzitter krijgt een dag betaald voor de vereniging. Maar persé geen beroepsbestuurders: onze kracht als vakinhoudelijke vereniging ligt juist in onze kennis van zaken, aan het feit dat we zelf voor de klas staan en het niet van horen zeggen hebben.
Het bestuur, en het voorzitterschap in het bijzonder, is bij uitstek een plek om je passie voor wiskundeonderwijs uit te leven en te proberen zaken in gang te zetten, te beïnvloeden of in goede banen te leiden. Ik vind het heel leuk om aan het begin van iets te staan; ik was ooit de eerste juryvoorzitter bij de verkiezing van de *Docent van het Jaar*, toen nog door het blad *Van 12 tot 18*, en heb jarenlang geleurd met het idee voor de *Zebrareeks* tot ik Epsilon vond. En ook ons WiVa-project is de realisatie van een lang gekoesterde wens.
Voorzitter zijn is vaak heel plezierig, zoals bij de Wiskunde Scholen Prijs, waarbij we elk jaar weer pareltjes te zien krijgen. Prachtige voorbeelden van goed wiskunde-onderwijs, met aandacht, inzet en enthousiasme gemaakt (ze staan op de NVvW-site).
Het is soms frustrerend als de wereld niet meteen begrijpt hoezeer je gelijk hebt, zoals bij het verzet tegen de reducties van wiskunde B en de strijd om voldoende contacttijd. Soms is de tijdgeest er niet naar en staan andere belangen en afwegingen een voor ons vak gunstig besluit in de weg. Niet iedereen heeft altijd het wiskundeonderwijs als eerste prioriteit. Bij de commissie Dijsselbloem kregen we ons gelijk over Basisvorming en Tweede fase achteraf, maar een lange adem en stug volhouden blijft nodig. Zo ben ik erg benieuwd of de nieuwe programma's van cTWO in de praktijk niet te zeer overladen zullen blijken – gelukkig wordt daar in het project op gelet – en heb ik me met terugwerkende kracht afgevraagd of we niet toch meer hadden moeten aandringen op een voorbeeldexamen havo B met de nieuwe programma's. Er stond van alles in de syllabus, er hadden leraren in die syllabuscommissie gezeten, maar toch. Dat is een lastig, misschien wel onoplosbaar probleem. Programmawijzigingen hebben een lange doorlooptijd, de discussie en besluit-|vorming erover speelt zich vele jaren voor het eerste examen af. Op dat moment wordt het voor velen pas concreet, en krijg je soms een reactie als: wie heeft zoiets stoms nou weer bedacht, waarom is mij niets gevraagd? Tja, de verantwoordelijke commissie is dan allang ontbonden en de veldraadplegingen hebben ook al jaren geleden (met soms geringe belangstelling, omdat invoering nog zo ver weg is) plaatsgevonden. Zoveel mogelijk informeren is het enige, maar men moet ook geïnformeerd willen worden natuurlijk. Eigenlijk zou ik de procedure van programma-wijzigingen willen veranderen. Het is nu teveel ad hoc, hollen of stilstaan, en het resultaat afhankelijk van toevallige factoren. Ik pleit al een tijdje voor een permanente curriculumcommissie, die op basis van het volgen van ontwikkelingen, zowel in het onderwijs als in het vak, voorstellen doet voor veranderingen, die dan meer gebaseerd zijn op kennis dan op overtuiging.

Vanaf het begin van mijn voorzitterschap heeft het bestuur twee lijnen gevolgd: allereerst het positioneren van de vereniging als vanzelfsprekende partner in het wiskundeonderwijs in Nederland, en vervolgens werken aan het 'empowerment' van de wiskundeleraar; kort gezegd: geef de leraar zijn vak en zijn beroepstrots terug. Die eerste lijn is terug te vinden in de vele contacten die we onderhouden, het tweede vindt u onder andere terug in WiVa, en in de deelname aan allerlei commissies. Nu het belang van – ook vakinhoudelijk – goede docenten weer wat meer wordt ingezien, hebben we wat dat betreft het tij mee en komt het erop aan dat te benutten en een stevig beroepsprofiel neer te zetten voor het tij weer verloopt.
Ik sta komende jaarvergadering weer herkiesbaar, maar voor mijn aller-allerlaatste termijn. Hoezeer ik dit ook de leukste baan van de wereld vind, het is belangrijk dat er een opvolger komt, iemand die weer andere accenten legt, die vaardigheden heeft die ik mis. Dat houdt de vereniging gezond en vitaal. En ja, dat is ook een uitnodiging: **iets voor u misschien**?

Het beloofde overzicht

Waar doen we als NVvW zoal aan mee binnen de wiskunde (in het cursusjaar 2008/2009 en in willekeurige volgorde).

Vertegenwoordigend/extern	Wie
CEVO-vaksecties; bindende voordracht	Namen zijn niet openbaar.
Pilot Open leermiddelenbank, project van VO-raad, gesteund door OCW om te komen tot open digitaal lesmateriaal van goede kwaliteit	Marian Kollenveld (lid stuurgroep)
Vernieuwingscommissie voor wiskunde cTWO, lid + db	Carel van de Giessen en Swier Garst (beiden lid), Marian Kollenveld (lid + db); in elke programmacommissie leraren op voordracht.
Syllabuscommissies PEP 2007 en 2014+	In elke commissie leraren op voordracht.
Platform bètavernieuwing, combi van de 5 vernieuwingscommissies	Marian Kollenveld, opgevolgd door Henk van der Kooij
Redactie Zebraboekjes	Peter Kop (voorzitter), Floor van Lamoen, Swier Garst, Gerard Stroomer (leden)
Bestuur stichting Epsilon (uitgever van wiskunde boekjes o.a. de Zebrareeks)	Frank van den Heuvel, Marian Kollenveld
Jury van de Wiskunde Scholen Prijs (georganiseerd door FIsme, uitvloeisel van het lustrumproject NVvW-75)	Marian Kollenveld (voorzitter), Dédé de Haan (organisatie)
Programmacommissie van de Vakantiecursus in Amsterdam en Eindhoven (georganiseerd door het CWI)	Marian K ollenveld (voorzitter), Jan Aarts (inhoudelijk organisator)
WiVa-1 en WiVa-2, een project (i.s.m. SBL en de Vereniging Levende Talen) om te komen tot explicitering van de vakinhoudelijke competentie van de wiskundeleraar, het bedenken van (her)registratiecriteria, ontwikkelen van een register voor leraren en criteria voor nascholing.	Marianne Lambriex (projectleider), Marian Kollenveld (lid stuurgroep; tot augustus)
Platform Wiskunde Nederland (PWN), landelijk bureau van de wiskunde, herkenbaar loket, bundeling van losse activiteiten, waarin misschien vakinhoudelijke om/na/bij- en opscholing ondergebracht kan worden (we zijn hierbij nog in de opstartfase).	Swier Garst, Douwe van de Kooi, Marian Kollenveld
Voorzittersoverleg wiskunde (onder meer KWG, NVvW, Kamer Wiskunde (VNSU), KNAW, NWO); initiatiefnemer van PWN, en gaat daarin op.	Marian Kollenveld
Taakgroep Nationale PR-medewerker voor de wiskunde; gaat op in PWN.	Marian Kollenveld (tot augustus)
Contacten met FIsme en APS	Marian Kollenveld
Contacten met OCW en politiek	Marian Kollenveld
Bètafederatie	Marian Kollenveld
Contacten met NVORWO	Marian Kollenveld
Platform VVVO (Vakinhoudelijke Verenigingen in het Voortgezet Onderwijs)	Henk Rozenhart
NOCW (Nederlandse onderwijscommissie wiskunde), een commissie van het KWG; gaat op in PWN.	Metha Kamminga, Marian Kollenveld
Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars	Swier Garst
KWG (Koninklijk Wiskundig Genootschap)	Leraar in het bestuur met als taak het organiseren van het Wintersymposium (op voordracht): Iris Gulikers
Vakbond	Henk Rozenhart, Pim van Bemmel
Resonansgroep project Nationale Kennisbank Vaardigheden Wiskunde	Henk Rozenhart
Resonansgroep project Rekenlijn	Marianne Lambriex
RekenVOort, eigen project samen met FIsme	Gert de Kleuver (projectleider)
Veldlegitimering Kennisbasis wiskunde voor lerarenopleidingen	Marianne Lambriex, Henk Rozenhart
Tweedegraads lerarenopleiders	Douwe van der Kooi
Vadiwulo, vakdidactici universitaire eerstegraads opleidingen	Douwe van der Kooi

Eigen zaken	Wie
Bestuursvergadering	Alle bestuursleden
Dagelijks bestuur	Kees Lagerwaard (secretaris), Frank van den Heuvel (penningmeester), Marian Kollenveld (voorzitter)
Administratie (leden + financieel), winkeltje, vlaggen, enz.	Elly van Bemmel, Pim van Bemmel
Werkgroep HBO	Metha Kamminga (voorzitter), Henk van der Kooij
Werkgroep VMBO	Wim Kuipers, Henk Bijleveld
Werkgroep HAVO/VWO	Henk Rozenhart
Werkgroep MTO	In ruste. Activeren?
Werkgroep jaarvergadering	Marianne Lambriex, Henk van der Kooij
Examenbesprekingen	Marian Kollenveld voor de zaaltjes (en als invalkracht), Grada Fokkens en Conny Gaykema voor de rest
Website en PR	Metha Kamminga
PR-commissie	Metha Kamminga
Euclides	Henk Bijleveld
WereldWiskunde Fonds	Douwe van der Kooi
Werkgroep didactiek	Wim Kuipers
Bovenbouwwerkgroep NVON	Cees Rijke, Henk van der Kooij
Nomenclatuurcommissie	Metha Kamminga, Marianne Lambriex
Wisbase, database proefwerken (mede ondersteund door NVvW)	Marian Kollenveld
Wisclass, database oefensommen	Marian Kollenveld
Veld/onderzoeksaanvragen o.a. SLO/LPC	Henk van der Kooij, Kees Lagerwaard
Olympiade/Kangoeroe	Marianne Lambriex
Raad van Wijzen	In ruste (alleen voor problemen).
Webmastersoverleg	Metha Kamminga, Lennart de Jonge, Dick Klingens (adviseur)

Notulen van de jaarvergadering

VAN DE NVvW OP 8 NOVEMBER 2008 TE NIEUWEGEIN

[Kees Lagerwaard]

1. Opening
Marianne Lambriex vraagt de aanwezigen zoveel mogelijk in te schikken opdat de talrijke aanwezigen een plaatsje kunnen vinden in de aula van het Anna van Rijn College.
Marian Kollenveld verwelkomt allen, meldt de afwezigheid van enkele ereleden en bestuursleden en spreekt haar voldoening uit over de grote opkomst. Voordat ze haar jaarrede begint staat ze stil bij het overlijden van de echtgenote van Kees Hoogland.

2. Jaarrede
De volledige tekst van de jaarrede is te vinden in *Euclides* nummer 4, jaargang 84.

3. Notulen
Over de notulen van de jaarvergadering 2007 wordt alleen opgemerkt dat er als locatie niet Cals College maar Anna van Rijn College had moeten staan. Met dank aan de secretaris worden de notulen vastgesteld. Over het jaarverslag zijn er geen vragen of opmerkingen.

4. Jaarverslag Euclides
Slechts een opmerking: de jubileumuitgave van de NVORWO die de *Euclides*-abonnees bij het februarinummer ontvingen, werd niet door de NVORWO maar door de NVvW betaald.

5. Financiën
Een overzicht van baten en lasten uit de jaarrekening 2007/2008, de balans per 31-7-2008, de begroting voor 2009/2010 en een toelichting daarop werden voorafgaand aan de vergadering uitgereikt. Geen van de aanwezigen had op- of aanmerkingen op deze stukken. De kascommissie (Vreugdenhil en Jansen) had de boekhouding in orde bevonden. De penningmeester werd gedechargeerd.
De aftredend penningmeester lichtte een en ander middels een wiskundig getinte PowerPoint-presentatie toe en kwam na hoogstaand rekenwerk tot het voorstel de contributie voor gewone leden op € 65,00 vast te stellen en voor jeugd- en seniorleden op € 32,50. Dit voorstel werd aangenomen.

6. Kascommissie
Voor de kascommissie wordt nog een nieuw lid gezocht.

7. Bestuursverkiezing
De aftredende bestuursleden Henk Bijleveld, Henk van der Kooij en Henk Rozenhart werden herkozen. Voor de niet-herkiesbare secretaris Wim Kuipers en penningmeester Swier Garst traden de door het bestuur voorgedragen opvolgers Kees Lagerwaard en Frank van den Heuvel aan. Ook Douwe van der Kooi treedt tot het bestuur toe.
De voorzitter schetste de inbreng van de afgetreden bestuursleden Wim Kuipers en Swier Garst en dankte hen voor hun jarenlange inzet. Haar voorstel om beiden te benoemen tot erelid van de vereniging werd door de vergadering middels daverend applaus aangenomen

8. Lerarenregister
Marianne Lambriex vertelde een en ander over het project WiVa, de Wiskundeleraar Vakbekwaam. Men streeft naar een beroepsregister voor wiskundeleraren. Daartoe moeten naast algemene ook vakspecifieke beroepsstandaarden worden beschreven. De aanwezigen kregen voor de jaarvergadering een informatieboekje over WiVa. Ook werd geattendeerd op informatie op de NVvW-site (doorklikken naar Werkgroepen en dan naar Beroepsregister).

9. Rondvraag
Van de rondvraag werd geen gebruik gemaakt, zodat de voorzitter kon overgaan tot:

10. Sluiting.

Erratum Euclides 85-1, pag. 48
Rechter kolom (bij D4), vanaf regel 11 v.o. moet staan:
Een voorbeeld van zo'n opgave is:
Los op de vergelijking:

$$(x^2-7x+12)\cdot(8x-11)=(x^2-7x+12)\cdot(3x+14)$$

Verslag van het verenigingsjaar

1 AUGUSTUS 2008–31 JULI 2009

[Kees Lagerwaard]

Bestuur

Het bestuur bestond de eerste maanden van dit verenigingsjaar uit voorzitter Marian Kollenveld, secretaris Wim Kuipers, penningmeester Swier Garst en de leden Metha Kamminga, Marianne Lambriex, Henk Bijleveld, Henk van der Kooij en Henk Rozenhart.
Tijdens de jaarvergadering op 8 november 2008 traden secretaris Wim Kuipers en penningmeester Swier Garst af als bestuurslid. Zij werden tijdens die vergadering bij acclamatie benoemd tot erelid van de vereniging. Het bestuur werd aangevuld met Frank van den Heuvel, Douwe van der Kooi en Kees Lagerwaard. Er is in het bestuur nog een vacature voor een collega uit het vmbo.
Het dagelijks bestuur bestaat uit voorzitter Marian Kollenveld, penningmeester Frank van den Heuvel en secretaris Kees Lagerwaard.
Er zijn in het afgelopen jaar 9 bestuursvergaderingen geweest. Daarnaast heeft het dagelijks bestuur enkele keren vergaderd over spoedeisende zaken.

Aantal leden

Op 1 augustus 2008 telde de vereniging ruim 2500 leden. Dat zijn er 48 minder dan het jaar ervoor. Die langzame daling is al een aantal jaren aan de gang. Het aantal gepensioneerde leden stijgt, maar wordt onvoldoende gecompenseerd door nieuwe aanmeldingen. Het bestuur zal het lidmaatschap voor studenten aan de lerarenopleidingen nog aantrekkelijker maken.

Algemeen

De voorzitter heeft dit jaar middels brieven aan politiek Den Haag en in directe contacten met beleidsbepalers en parlementsleden gepleit voor meer ruimte in het voortgezet onderwijs voor wiskunde en rekenen. Aan de eisen die vanuit het vervolgonderwijs worden gesteld, kan alleen worden voldaan wanneer er na alle urenreducties eindelijk weer eens substantieel meer contacttijd komt voor wiskunde. Ook de voorgenomen strengere zak/slaagregeling was aanleiding voor actie richting Den Haag. Deze regeling draagt immers het gevaar in zich dat leerlingen voor een eenvoudiger wiskunde zullen gaan kiezen of zelfs helemaal geen wiskunde als eindexamenvak, hetgeen tot een niveauverlaging in plaats van de beoogde niveauverhoging zal kunnen leiden.

Federatie Onderwijsbonden

Als vakvereniging is de NVvW lid van de Federatie Onderwijsbonden. De Federatie Onderwijsbonden is aangesloten bij de CMHF (Centrale voor Middelbare en Hogere Functionarissen) teneinde aan de cao-onderhandelingstafels te komen. De aangesloten vakverenigingen bij de Federatie Onderwijsbonden vertegenwoordigen na deze aansluiting een kleine 25.000 leden, waarvan 2500 van de NVvW. Vele individuele leden met problemen inzake rechtspositie en andere arbeidszaken hebben gebruik gemaakt van gespecialiseerde en deskundige adviezen van het NVvW-Rechtspositie Adviesbureau.
Eén van de belangrijke taken is het afsluiten van cao's. Voor de vereniging zijn, gezien de samenstelling van het ledenbestand, de cao-vo, cao-bve en cao-hbo van belang. Het afsluiten van de cao-vo is zeer moeizaam verlopen. De Federatie Onderwijsbonden heeft tot het uiterste onderhandeld en dat heeft resultaat gehad. De AOB en CNVO, die stakingen hebben uitgeroepen, kwamen weer op één lijn met de Federatie Onderwijsbonden. Dit heeft geresulteerd in een nieuwe cao-vo met een gunstige financiële pagina, die in het licht van de ontstane financiële crisis niet vanzelfsprekend meer was.

VVVO

Ook dit jaar maakte de NVvW weer deel uit van het Platform VVVO. Bij dit Platform voor Vakinhoudelijke Verenigingen Voortgezet Onderwijs spreken vertegenwoordigers van deze verenigingen met elkaar en met derden over ontwikkelingen binnen het onderwijs. Het bestuur van het platform heeft regelmatig overleg met o.a. het ministerie, de VO-raad, SLO, inspectie en anderen. Het deelnemen van de NVvW in dit platform is dus van groot belang om onze visie onder de aandacht van deze instanties te brengen. De deelname heeft dit jaar ook geleid tot een meerjarige subsidietoekenning van het ministerie in het kader van de Kwaliteitsagenda VO, taal en rekenen. Hiermee heeft de NVvW in samenwerking met het Freudenthal Instituut twee grote rekenprojecten kunnen opzetten.
Een ander thema dat het platform met het ministerie heeft besproken, is de tweede correctie van eindexamens. De druk op de agenda en de hoeveelheid tijd die een goede

tweede correctie kost, zijn na intern onderzoek duidelijk aan de minister overgebracht. Vooralsnog zijn er naar de mening van het platform geen goede beslissingen op dit terrein genomen en zal vanuit het platform de discussie worden voortgezet.

Jaarvergadering/studiedag

De Jaarvergadering/studiedag van 8 november 2008 met als thema 'Wiskundeonderwijs: het kan niet zonder didactiek' werd zo goed bezocht dat de aula van het Anna van Rijn College bij het plenaire gedeelte tot de laatste plaats bezet was. De jaarrede van de voorzitter kunt u nalezen in *Euclides* nummer 4, jaargang 84. De notulen van de jaarvergadering vindt u in *Euclides* nummer 2 van die jaargang.
Het themagedeelte was georganiseerd door de bestuursleden Wim Kuipers en Henk van der Kooij, in samenwerking met Bert Zwaneveld (OU) en Pauline Vos (UvA). Tussen de openingslezing 'Didactische knopen ontward' van Lidy Wesker en de afsluitende voordracht 'Maar waarom…? Bewijzen en redeneren in de onderbouw' van Michel Roelens waren er talrijke werkgroepen over 'de kunst van het onderwijzen'.

Website www.nvvw.nl

Er is dit jaar onder leiding van Metha Kamminga veel werk verzet om de site nog completer en gebruiksvriendelijker te maken. We namen afscheid van webmaster Leo Nagtegaal, maar prijzen ons gelukkig met de inzet van webmaster Lennart de Jonge en forummoderator Erik Korthof. Op de achtergrond is ook Dick Klingens nog actief. Er zal de komende tijd een steeds groter deel 'achter de login' geplaatst worden en daarmee slechts toegankelijk zijn voor leden. Zo wordt het examenforum in de toekomst onbereikbaar voor leerlingen en kan er in de eigen ruimtes voor werkgroepen worden gediscussieerd zonder dat de buitenwereld meekijkt.
Voor nieuwe leden is er achter de login ook specifieke informatie te vinden, onder andere over een speciale ontvangst op hun eerste jaarvergadering/studiedag.

Euclides

Het eerste jaar met Klaske Blom als hoofdredacteur leverde opnieuw een reeks zeer interessante nummers op met een fraaie mix van nieuws, informatie en aan wiskunde en wiskundeonderwijs gerelateerde artikelen. In april 2009 namen we afscheid van de voorzitter van de redactie, Gert de Kleuver. Heiner Wind werd bereid gevonden de opengevallen plaats in te nemen.

RekenVOort

Het ministerie van OCW heeft een projectvoorstel goedgekeurd dat door de NVvW in samenwerking met het Freudenthal Instituut was ingediend. Vanaf december 2008 wordt er gewerkt aan twee rekenmodules die bestemd zijn voor leerlingen in de bovenbouw vmbo en havo die geen wiskunde in hun examenpakket hebben. Projectleider namens de NVvW is Gert de Kleuver. Er zijn auteursteams geformeerd die rekenlessen ontwerpen die in schooljaar 2009/2010 op een aantal pilotscholen worden uitgetest. Eind 2010 zal er voor vmbo-BB, KB en GL/TL een rekenmodule zijn (zowel op papier als digitaal) die de vmbo-leerlingen op het rekenniveau 2F brengt. Niveau 2F is het kennisniveau dat door de Commissie Meijerink is aangemerkt als noodzakelijk voor een goed functionerend burger in deze tijd. Voor de havo-leerlingen zonder wiskunde zal een dergelijke lessencyclus de leerlingen tot rekenniveau 3F, het vereiste beginniveau voor niet-exacte studies in het hoger onderwijs, moeten brengen.

Hbo

De Werkgroep HBO is afgelopen jaar tweemaal bijeen geweest. De werkgroep organiseerde in maart 2008 een conferentie. De voorbereidingen voor de volgende conferentie (de datum is nog onbekend) zijn in volle gang. Op de website zijn de activiteiten van de werkgroep te volgen.

Havo/vwo

Tijdens dit verenigingsjaar zijn de door cTWO ontwikkelde nieuwe eindexamenprogramma's voor havo en vwo door de minister vastgesteld en zijn syllabuscommissies gestart met de explicitering van deze programma's. In elke syllabuscommissie is de NVvW vertegenwoordigd.
De Werkgroep HAVO/VWO heeft dit jaar een zogeheten exittoets wiskunde A ontwikkeld in reactie op de entreetoetsen die bij diverse studierichtingen op hbo's en universiteiten worden afgenomen. Deze exittoets geeft een beeld van het beheersingsniveau van algebraïsche vaardigheden die bij wiskunde A worden aangeleerd. De werkgroep zal er in *Euclides* over publiceren. Op de NVvW-site is een en ander te downloaden.

Vmbo

Op BB-niveau doen de meeste leerlingen hun eindexamen op de computer. Ook voor KB is er een pilot Digitale Examens gestart. Er is ook behoefte aan heldere nomenclatuurafspraken. Voorts is er discussie over de gewenste niveauverschillen tussen BB, KB en GL/TL. De ontwikkelingen in het omvangrijkste schooltype staan dus niet stil. De Werkgroep VMBO wil deze ontwikkelingen volgen en mede vormgeven. Enige versterking met enthousiaste vmbo-docenten is gewenst.

ICT-ontwikkeling

De VO-raad heeft onlangs een project Digitalisering Leermiddelen gestart. De voorzitter van de vereniging is bij dit project betrokken als lid van de stuurgroep bij de pilot Open Leermiddelenbank Wiskunde.
Ook is er betrokkenheid bij het project NKBW2, de Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde 2.
Voorts ondersteunt de NVvW de projecten WisBase en WisClass van Bram Theune en David van Oorschot.

Platform Wiskunde Nederland

Dit jaar is het Platform Wiskunde Nederland opgericht. Het platform beoogt een betere behartiging van de belangen van de wiskunde, zowel voor het eigen veld als daarbuiten. Het platform opereert onder de koepel van NVvW en KWG.
De vereniging is vertegenwoordigd in het bestuur en in de commissie Onderwijs.

IMO 2011

De Internationale Wiskunde Olympiade vindt in 2011 voor de eerste keer in Nederland plaats. Dit lijkt een mooie

gelegenheid het vak wiskunde extra onder de aandacht te brengen. De NVvW zal deze Olympiade op diverse manieren van harte ondersteunen.

WiVa

De WiVa-projectgroep (NVvW en FIsme) heeft het rapport 'Wiskundeleraar Vakbekwaam' dat door het bestuur in mei 2008 was goedgekeurd, gepresenteerd op de jaarvergadering. Tevens is er een doorstart gemaakt, WiVa2a, waarin een pilotgroep van 50 wiskundeleraren zich actief heeft beziggehouden met de proefregistratie en alles wat erbij komt kijken. De output van deze groep is een zeer waardevolle input gebleken in de vakverenigingoverstijgende SBL-projectgroep. Er zijn nu zo'n 30 initiëel geregistreerde wiskundeleraren. Ook voor het verdere vervolgtraject WiVa2b, het beroepsregister, is een subsidie toegekend.

WwF

Dankzij de vrijwillige bijdrage van de leden aan het Wereldwiskunde Fonds en de opbrengst van de boekenveiling kon een project in Nicaragua, het verstrekken van schoolboeken en lesmateriaal, worden afgerond. Ook werd ruim 3000 euro besteed aan computers, didactische spellen en lesmaterialen voor een project in Bolivia.

Vakantiecursus

De goed bezochte 62e Vakantiecursus in Amsterdam en Eindhoven, georganiseerd door CWI in samenwerking met de NVvW, met als thema 'Wiskunde en profile' was ook inhoudelijk opnieuw een succes.

Tot slot

Het lijkt wel of het nooit rustig wordt in wiskundeonderwijsland: rekenen, doorlopende leerlijnen, nieuwe examenprogramma's, teruglopende aantallen studielasturen, … Er is veel overleg nodig om de belangen van docenten en leerlingen zo goed mogelijk te behartigen. Daarbij maakt de vereniging dankbaar gebruik van de inbreng van onze leden via artikelen, werkgroepen en de website.
Het bestuur hoopt dat die inbreng het komende jaar weer net zo groot zal zijn en wellicht zelfs groter.

BOEKBESPREKING / De Gelukkige Rekenklas

[Bram van Asch]



Redactie: Tom Braams en Marisca Milikowski
Uitgever: Boom Uitgevers, Amsterdam (2008)
ISBN 978 90 8506 615 6
Prijs: € 19,50, 208 blz.

Dit boek is een bundeling van 24 hoofdstukken, met bijdragen van een groot aantal auteurs: Tom Braams en Marisca Milikowski, die de redactie vormen, Jan van de Craats, Rob Milikowski, Bas Braams, Pieter van Biervliet, Sietske Walda, Ank van Kampen, Ron Aharoni, Arjen de Vries, Stephan Vermeire en Hugo Bakker. De hoofdstukken zijn opgedeeld in vier delen. Deel 1 heet 'De situatie anno 2008'. Een belangrijk deel van dit eerste stuk wordt gevormd door het hoofdstuk 'Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. Mythes in de rekendidactiek' van Jan van de Craats en een aantal reacties daarop. Het eerstgenoemde hoofdstuk is de tekst van een voordracht die Van de Craats tijdens een Panamaconferentie hield, en die eerder verscheen in Nieuw Archief voor Wiskunde en in het Tijdschrift voor Remedial Teaching. In deze eerste serie hoofdstukken wordt heel helder aangegeven wat er mis is in het realistisch rekenonderwijs. De reacties op het stuk van Van de Craats zijn verhalen van mensen die vertellen wat zij zelf in dat verband hebben meegemaakt. Vaak onthutsend, soms hilarisch zoals het voorbeeld waar op school met behulp van een rekenmachine werd uitgelegd waarom 24 : ¼ gelijk is aan 6.

Deel 2 heet 'Het gedachtegoed van Freudenthal en opvolgers nader bekeken'. In het eerste hoofdstuk van dit deel is het meteen al raak: Constructivistisch leren: broodje aap of wetenschap? Aan de hand van een voordracht van professor Paul A. Kirschner wordt de onderwijshype van de constructivistische didactiek genadeloos ontleed. Kirschner typeert het huidige constructivistische discours als een uiting van 'geloof', een blind vertrouwen in de waarheid van iets op basis van de veronderstelling of overtuiging dat iets waar of niet waar is, zonder enige vorm van adequaat bewijs. Wat verderop in dit deel ook een interview met drie remedial teachers, die aangeven hoe de realistische rekendidactiek zeer negatief werkt voor zwakke rekenaars. In deel 3, 'De klas en de leerlingen', wordt onder andere een pleidooi gehouden voor het uit het hoofd leren van de tafels, en wordt ook gekeken naar het gebruik van de grafische rekenmachine. De voor het vervolgonderwijs zeer herkenbare conclusies over bijvoorbeeld het ontbreken van rekenvaardigheden, en het gebrek aan inzicht over het globale verloop van de grafieken van zelfs de meest elementaire functies komen daarin naar voren. Het vierde en laatste deel is kort, bestaat maar uit één hoofdstuk, dat 'Conclusies en aanbevelingen' heet. Voor wie het boek tot zover heeft gelezen zullen de aanbevelingen niet als een verrassing komen. Het boek leest zeer vlot weg.

Op de Technische Universiteit Eindhoven word ik elk jaar via de eerstejaars studenten geconfronteerd met de opbrengst van het realistisch wiskunde onderwijs. Na het lezen van dit boek is mij in elk geval een stuk duidelijker geworden hoe het zo ver heeft kunnen komen. Ik beveel het boek sterk aan voor een ieder die begaan is met het reken- en wiskundeonderwijs.

Over de recensent

Bram van Asch is redacteur van *Euclides*. Hij werkt als universitair docent aan de Technische Universiteit Eindhoven, en is daar onder meer betrokken bij de eerstegraads lerarenopleiding.
E-mailadres: *a.g.v.asch@tue.nl*

RECREATIE

Puzzel 85-2

Doorsneden

[Frits Göbel]

Bij de term 'doorsneden' zal menigeen aan kegelsneden denken. Onze opgaven gaan over drie andere soorten doorsneden. We beginnen met doorsneden van een kubus met een vlak.
Een bekende inkleding vertelt over Platlanders die vanuit dimensie 3 met een kubus worden geconfronteerd. De kubus beweegt met een lichaamsdiagonaal loodrecht op het vlak van de Platlanders. Ze zien dan een groeiende gelijkzijdige driehoek, die geleidelijk overgaat in een regelmatige zeshoek, en daarna in een krimpende driehoek.
Er bestaat een wiskundefilm waarin iets dergelijks, maar dan een dimensie hoger wordt vertoond. Ik weet niet meer welk veelvlak het was. Hoe dan ook, die film was de inspiratie voor de volgende opgave.

Opgave 1
Een 4-dimensionale kubus wordt, met een hoofddiagonaal loodrecht op onze ruimte, in de richting van die diagonaal onze ruimte binnengeschoven.
Geef de opeenvolgende doorsneden voor zover dit Platonische of Archimedische lichamen zijn.

Een eeuwenoud probleem betreft het tekenen van een 'cirkel' met een passer op een cilinder. De ontstane ruimtekromme is in feite de doorsnede van de cilindermantel met een boloppervlak.
De vraag is: wat krijg je na het afwikkelen van de cilindermantel? Je verwacht een ovaal die geen ellips is. Dat klopt.

Opgave 2
Bepaal de vergelijking van de vlakke kromme na het afwikkelen.
Neem hierbij de plaats van de passerpunt als oorsprong van het assenstelsel en laat de y-as evenwijdig aan de as van de cilinder lopen. Laat R de straal van de cilinder zijn en r de straal van de bol, waarbij $r < 2R$.

Tot slot iets eenvoudigs.

Opgave 3
Een rechthoekig blok van 4 bij 6 bij 7 wordt doorsneden door een vlak dat verschillende standen kan aannemen maar dat steeds door het middelpunt van het blok gaat.
Hoeveel vierkante doorsneden zijn er mogelijk? Beantwoord deze vraag ook voor een blok van 3 bij 6 bij 7.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 1 december.
Veel plezier!

Oplossing 84-8

Aan u de keus!

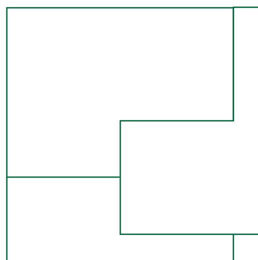
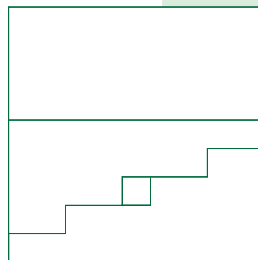
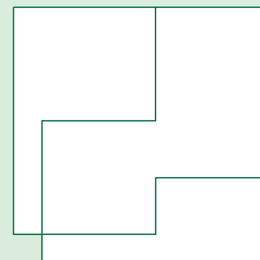
Er waren deze keer 23 inzenders, onder wie vier nieuwe: J.M. de Geus (geen familie), Leo Pos, Cornelia Wallien en Jon van Midde. Alle vier van harte welkom!

De meeste inzenders kozen de rijen.
De gevraagde getallen zijn:
a. 437 (kwadratische rij);
b. 401 (priemen van de vorm $n^2 + 1$);
c. 108 (getallen tussen priemtweelingen);
d. 7 en 94 (tafel van 7 achterstevoren);
e. 29331825600 (zie verder);
f. 44044 (verschillen achterstevoren),
en tenslotte:
lim $120(2^n - 1)/n$ voor n naar 0 en dat is 120ln(2).

De rijen a en d zijn door mijn echtgenote (geen wiskundige) bedacht. Ik heb haar ingeschakeld om wat meer variatie in de opgaven te krijgen. Dat lukte wel, maar ik kon haar rij d niet vinden!
Voor de meeste inzenders vormde alleen rij e een probleem. De bedoelde regelmaat van deze rij is: de n-de term $t(n)$ is het kleinste getal met precies $t(n – 1)$ delers. Om de rij te bepalen, moet je dan nog de eerste term weten. Als die 1 of 2 is, zijn alle termen van de rij gelijk. Maar met $t(1) = 3$ explodeert de zaak, alsof die 3 een soort kritische massa is.

Alle rijen behalve rij a blijken ook op internet te staan, zoals door sommige inzenders werd opgemerkt. Alternatieve oplossingen heb ik in principe geaccepteerd, maar niet als de redenering al te ingewikkeld is, of als die alleen opgaat voor de laatste termen.

De pentomino-problemen werden door acht inzenders gekozen.
Het beste resultaat kwam van Harm Bakker. Hij vond een vierkant met zijde $\sqrt{5}$ voor P, Y en Z, 7/3 voor I en X, en 9/4 voor de overige pentomino's.
In feite kunnen ook I en X in een vierkant met zijde 9/4, zoals hors concours gevonden door Helmut Postl; zie onderstaande figuren voor (vlnr.) F, I en X.

Ladderstand
De top van de ladder ziet er nu als volgt uit.
G. Riphagen 574
H. Klein 472
L. v.d. Raadt 463
W. Doyer 427
T. Kool 345
J. Hanenberg 335
N. Wensink 322
H. Linders 286
H. Bakker 258
W. v.d. Camp 255
M. Woldinga 234
K. v.d. Straaten 222
F. v. Lamoen 209

De ladderprijs, een boekenbon van 30 euro, gaat dus naar Gerhard Riphagen. Gefeliciteerd!

De volledige ladderstand is te vinden op de website van *Euclides* (*www.nvvw.nl/euclides.html*).

SERVICEPAGINA

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels

Zie verder ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*

Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

Voor overige internet-adressen zie *www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php*

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie *www.wiskundeonderwijs.nl*

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*.

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
3	22 december 2009	27 okt 2009
4	9 februari 2010	8 dec 2009
5	30 maart 2010	2 feb 2010
6	18 mei 2010	23 mrt 2010
7	6 juli 2010	11 mei 2010

5, 12, 19 november (donderdagen), Utrecht
Cursus K&S voor wiskunde D
Organisatie FIsme

zaterdag 7 november, Nieuwegein
Jaarvergadering/Studiedag: Wiskunde, daar kun je op rekenen!
Organisatie NVvW
Zie ook pag. 90 e.v. in dit nummer.

maandag 9 november, Ede
Conferentie: 10 jaar VMBO!
Organisatie Sardes, Actis Advies, Uitgeverij SWP

woensdag 11 november, Utrecht
Cursus Analytische Meetkunde voor wiskunde D
Organisatie FIsme

zaterdag 14 november, Utrecht
Ars et Mathesis-dag
Organisatie Stichting Ars et Mathesis i.s.m. Universiteit Utrecht

vrijdag 20 november, op de scholen
Wiskunde B-dag en Voorronde Wiskunde A-lympiade
Organisatie FIsme

2010

vrijdag 8 januari, Amsterdam
Wintersymposium Bèta en Techniek
Organisatie Vereniging voor Onderwijs Research

woensdag 27 januari, Utrecht
8e wiskundeconferentie
Organisatie APS
Zie verder ook pag. 65 in dit nummer.

vrijdag 29 januari, op de scholen
1e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2010
Stichting NWO

vr. 5 en za. 6 februari, Noordwijkerhout
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie FIsme
Zie ook pag. 264 in jrg. 84, nr.7.